ELEMI MÉRTAN.

HARMADIK RÉSZ

HÁROMSZÖG-

ÉS

KÚPSZELET-TAN.

IRTA

TATAI ANDRÁS.

A' KECSKEMÉTI REF. FŐISKOLÁBAN MÉR- ÉS TERMÉSZETTAN'

NY. R. PROFESSORA.

(Két idomtáblákkal.)

PESTEN.

NYOMATOTT LANDERER ÉS HECKENASTNÁL.

1844.

n.

TARTALOM.

I. HÁROMSZÖGTAN.

II. KÚPSZELETTAN.

JAVÍTANDÓK.

lap.	*sor.*	*hiba.*	*javítás.*
12	10 (fel.)	*e' szó után*	mértanárok *tedd ezt:* — 's a' 21-dik §-i képletek' nyomán meg is mutathatni,
14	4 (fel.)	de ellenkező jegyekkel . .	*kitöröltessék*
18	3 —	$= a \quad b$	$= a + b$
26	2 (al.)	$\frac{R^2 (\text{ér. } a \pm \text{ér. } b.)}{R^2 \mp \text{ér. } a \times \text{ér. } b}$ . . .	$\frac{R (\text{ér. } a \pm \text{ér. } b)}{R^2 \mp \text{ér. } a \times \text{ér. } b}$
—	— —	's így az előbbi egyenlet	*tedd utána:* $\frac{\text{ér. } (a+b)}{R}$, lesz:
27	6 (fel.)	$a + b \quad p$	$a + b = p$
—	7 —	összeadatván —	*tedd. utána:* 's kivonatván)
32	11 (al.)	$CD \ \frac{CB \times \text{pótk. } C}{R}$ . . .	$CD = \frac{CB \times \text{pótk } C}{R}$
35	2 (fel.)	$= \frac{\log(s-c) + \log(s-b) - \log. bc}{2}$	*tedd ezt:* $= \frac{\log(s-c) + \log(s-b) - \log. bc}{2} + 10.$
42	16 (al.)	$= \frac{1}{4}\sqrt{4b^2c^2 - (b^2+c^2-a^2)}$	*t. ezt:* $= \frac{1}{4}\sqrt{4b^2c^2 - (b^2c^2-a^2)^2}$
47	1 —	tengelyének A' pont . . .	tengelyének A pont
49	10 —	ABB háromszögben . . .	Az ABD háromszögben
62	7 (fel.)	pótk. BAD pótk. CAD . .	pótk. BAD*:* pótk. CAD
69	13 —	$\text{pk.}(180^0 - a) = \frac{R . \text{pk.}(180^0}{\text{keb.}(180^0}$ 'sat.	$\text{pk.}(180^0 - a) = \frac{R^2 . \text{pk.} (180^0}{\text{keb.}(180^0}$ 'sat.
71	11 (al.)	pk. C = pk.c. keb. A . keb. C . .	pk. C = pótk. c. keb. A . keb. B.
75	11 (fel.)	$\text{keb.} c = \frac{\text{keb. h. potk. } C}{R}$ . .	$\text{keb.} c = \frac{\text{keb. h . keb. } C}{R}$
76	6 (al.)	$\text{ér. } C = \frac{R . \text{érint. } C}{\text{keb. } a}$ . . .	$\text{ér. } C = \frac{R . \text{érint. } c}{\text{keb. } a}$
78	1 (fel.)	$= \frac{R . \text{pótk. } A}{\text{keb. } c}$	$= \frac{R . \text{pótk. } A}{\text{keb. } C}$
100	6 (al.)	$= \frac{a^2}{b} : \frac{bx - x^2}{b}$ . . .	$= \frac{a^2}{b} \times \frac{bx - x^2}{b}$
107	9 (fel.)	eddigi $x = \frac{1}{2} a - u$, . .	eddigi x lesz, vagy $= \frac{1}{2} a - u$,
111	6 (al.)	$= \overline{P,} a^2$	$= \overline{P'}^2 a^2$
—	5 —	$\sqrt{\frac{P^2 b^2}{16}}$	$\sqrt{\frac{P'^2 b^2}{16}}$

IDOMOK' JAVÍTÁSA. *IX. tábl.* 1. *idom.* a' G ponttól, a' HE-vel egyközüleg pontos vonal huzassék, mellynek másik vége *h*-val jelöltessék; — Gh. — 6. *id.* a' 9 betű a' vastag vonal mellett álljon. — 10. *id.* a' szélső F helyett E legyen. — 8. *id.* a' B és C felebb essenek, 's a' vastag görbe vonalnak ezen betük által jelölt végei, az LM vonalnál alább ne menjenek.

HÁROMSZÖGTAN.

Bevezetés.

1. §.

A' tértani szabályok szerint, ha valamelly háromszögnek ismeretlen oldalát, vagy szögletét ki akarjuk keresni, meg akarjuk határozni: *vagy még egy másik* ismert háromszögre van szükség, mellyhez amaz hasonló, akár egyenlő legyen; — vagy csak rajzoló szerszámokkal dolgozhatunk, *mellyekkel* teljes pontosság el nem érhető. — Miként lehessen magában ugyanazon háromszögben, — miután annak hat része, t. i. három szöglete, és három oldala van, — ha három rész kiadatik, a' többi ismeretleneket kikeresni, még pedig pontosan számokkal meghatározni, vagyis — a' mint ki szokták fejezni — miként lehessen a' háromszöget *kifejteni*: erről tanít a' *háromszögtan* (trigonometria); melly tudomány, a' szerint, a' mint a' háromszögek kétfélék, t. i. *sík-* és *gömbháromszögek*, két szakaszra oszlik, u. m. *síkháromszögtan-* és *gömbháromszögtanra*.

ELSŐ SZAKASZ.

Síkháromszögtan.

(Trigonometria plana.)

---

2. §.

Síkháromszögtan azon tudomány, melly a' síkháromszög' három adott részeiből, a' többi ismeretlen részeket kikeresni tanitja.

Itt az adott 3 részek nem lehetnek mind szögletek, hanem legalább is egy oldalnak ki kell adatni. Mert a' síkháromszög' mekkoraságát csupán szögletek meg nem határozzák; mivel ugyanakkora három szögletek temérdek $\triangle$-gekben lehetnek, mellyek ugyan hasonlók egymáshoz, de oldalaik végetlenül különbözhetnek. A' síkháromszögek' mekkoraságát — mint már a vonaltanban látánk — ezek határozhatják meg: 1) három oldal, — 2) két oldal és egy szöglet, — 3) egy oldal és két szöglet. Ezek lehetnek hát a' három kiadandó részek.

3. §.

Valjon a' $\triangle$-ben a' szögletek, a' velök általellenes oldalokkal arányosak-e? — azaz: valjon a' mint van egyik szöglet a' másikhoz, — úgy van-e az elsőbbel általellenes oldal, a' másikkal általellenes oldalhoz? — Ha ez így volna: úgy a' háromszögtan felesleges lenne, mert az oldalokból a' szögleteket, és viszont, könnyen kikereshetnők aranyszabályon. — De ez nem így van. Mert, ámbár a' szögletek' növekedésével, nőnek az átellenes oldalok: de nem ugyanazon viszonyban, mellyben a' szögletek; p. o. két akkora szögletnek, nem két akkora oldal van átellenében; mit átláthatni az egyenesszögü egyenszárú △-ben, hol a' feszes-oldal, — azon elvnél fogva, miszerint két pont közt az egyenes vonal legrövidebb út, — nem lehet kétakkora, mint egyik egyik mellékoldal, — pedig kétakkora szögletnek van átellenében.

Mivel tehát a' szögleteket az oldalokkal arányba tenni, 's így ezeket amazokból, vagy viszont, kikeresni nem lehet: gondolkoztak a mértanárok, miként találhatnának ollyan vonalakat, mellyeknek mekkoraságuk ugyan a' szögletek' mekkoraságától függene, 's így a' különböző szögletekhez képest, ezen megfelelő vonalak' mekkoraságát is ki lehetne számítni; de azonban ezen vonalak nem a' szögletekkel, hanem a' háromszög' oldalaival lennének arányosak; hogy így ezen vonalakat a' megfelelő szögletek helyett vehetnék, 's az oldalokkal arányba tehetnék. Találtak is fel illyen vonalakat: 's ezeket *haromszögtani függvényeknek* (functiones trigonometricae), — vagy *szögvonalak*nak (lineae trigonometricae) nevezték.

ELSŐ CZIKKELY

A' háromszögtani függvényekről, vagy szögvonalakról.

4. §

Legelsőben is azt jegyezzük meg, hogy mindegy, akár szögletet mondjunk, akár annak mérő körívét,

1*

vagyis a' szöglet' szárai közt eső körívet azon körből, mellynek középpontja a' szöglet' hegyiben esik. Ésígy mindegy, akár valamelly szögletnek, — akár az azon szöglelet mérő körívnek függvényét említsük. — Azonban, mivel valamelly szögletnek hegyiből, mint középpontból, sok különböző nagyságú köröket lehet írni, mellyek közül akármellyikből azon körív, melly a' szöglet' szárai közt esik, mértéke azon szögletnek, — mint a' vonaltanban tanúltuk, — mert mindazon körök, és azoknak sugárai egymással arányosak: innen valamelly szögletnek, vagyis azt mérő körívnek függvényei, különböző hosszaságu vonalak lehetnek, a' szerint, a' mint a' mérő körív' sugara hosszabb vagy rövidebb. De ha az akár hosszabb, akár rövidebb sugárt egy megállapitott változhatlan számmal fejezzük ki, p. o. megtesszük *egy*-nek, vagy *tízezermilliónak*: ehhezképest azután valamelly függvény, akár hosszabb, akár rövidebb vonal legyen, mindig ugyanazon számmal fog kifejeztetni. E' szerint a' függvények mindig számokkal fejeztetnek ki, melly számok a' függvénynek a' felvett körsugárhozi viszonyát mutatják.

5. §.

id. 1. Továbbá hozzuk vissza emlékezetbe, mit a' vonaltanban tanultunk, hogy valamelly szöglet' vagy körív' *potlékának* (complementum) neveztetik az, a' mit ehhez hozzá kell tenni, vagy belőle elvenni, arra nézve, hogy egyenes szöget, vagy 90 foknyi körívet nyerjünk. Így p. o. (id. 1.) az ACD egyenesszög levén: az ACM-nek pótléka az MCD szöglet, vagy az AM körívnek pótléka az MD, és viszont; — továbbá az ACM' szögletnek pótléka a' DCM', — vagy az ADM' kör–

ívnek pótléka a' DM'. — Az egyenes szögű △-ben egyik hegyes szöglet pótléka a' másiknak. Általában $90^0 \pm a$-nak potléka $= \mp a$; és ha $a + b = 90^0$, az a és b egymásnak kölcsönösen pótlékai. — Így 40 foknyi szögletnek, vagy körívnek pótléka 50 foknyi, — és 50 foknyinak 40 foknyi, 'sat. — A' 90 foknyinál nagyobb szögleteknél miért neveztetik pótléknak az, a' mit belőle 90 fokig ki kell vonni: meg fogjuk érteni, mihelyt látandjuk, hogy a' szögvonalakra nézve legnagyobb igenleges szöglet az egyenes; ennél kisebbek azok, vagyis szögvonalaik kisebbek azoknak, mellyek a' 90 fokon akár felül, akár alúl vannak. — Már a' pótlék szögletek' vagy körívek' függvényei kölcsönösen egymáshoz képest *pót-függvényeknek* neveztetnek.

Továbbá valamelly szöglet' vagy körív' *egészitőjének* (supplementum) neveztetik az, a' mit ehhez hozzá kell adni, vagy tőle el kell venni, a' végre, hogy két egyenes-szöget, vagy félkörületet = 180 fokot nyerjünk. Így p. o. az ACM' szögletnek egészitője M'CB, és viszont, — vagy az ADM' körívnek egészitője M'B, és viszont; — így az ADBN' körívnek egészitője BN'. Általában $180^0 \pm g$-nek egészitője$=\mp g$; és ha $g + d = 180^0$: úgy g és d egymásnak kölcsönösen egészitői. — Így bármelly sikháromszögben egy szöglet, a' másik' kettő' összegének egészitője.

Ha az AB-vel egyközüleg húzatik MM': az AM és BM' körívek egyenlők: és mivel az AM' és AM két körívek' összege = 180^0: tehát ezek egymásnak egészitői.

6. §.

Háromszögtani függvények, vagy szögvonalak e' ...

következők: *kebel*)* (sinus), *érintő* (tangens), *szelő* (secans), *viszás kebel* (sinus versus), továbbá: *pótkebel* (cosinus), *pótérintő* (cotangens), *pótszelő* (cosecans), *pótviszáskebel* (cosinus versus). Lássuk ezeket renddel.

I. *Kebel* (sinus) nem egyéb, mint *a' szöglet' egyik száráról, a' másik szárára, vagy ha tompa a' szöglet, annak megnyujtott szárára eresztett függöny*, mellynek hossza, a' leeresztés' pontján, a' szöglet' hegyiből, mint középpontból körülirható kör' nagyságától függ, 's mellynek számokkal kifejezendő mennyisége, az említett kör' sugarához, mint *egységhez* viszonyíttatik. Ésígy akárhol eresztessék le a' szöglet' száráról, mindegy; mert a' különböző függönyöknek a' különböző sugarakhozi viszonya ugyanaz leend. — A' szögletet mérő körívhez képest pedig a' *kebel* így határoztatik meg: *a' kebel nem egyéb, mint a' körív' egyik végpontjáról, a' másik végpontjára húzható átmérőre leeresztett függöny.* Innen látnivaló, hogy *az egymást 180 fokra egészitő szögleteknek vagy köríveknek ugyanazon keblök van.* P (id. 1.) az ACM szögletnek, vagy AM körívnek keble az MP vonal; — a' BCM szögletnek, vagy BDM körívnek is, (melly az előbbinek egészitője) keble ugyanazon MP; — az ADM' körívnek is, melly hasonlólag egészitője az AM-nek, keble az MP = M'P'. — Így az ADBN' körívnek, mellynek nemleges egészitője az AM, keble ugyanaz, a' mi az

*) A' sinus-nak *kebel* magyar nevét, mivel már divatba jött, (verba valent sicut numi), én is megtartom, — bár az egészen helytelen; mert a' háromszögtani sinus = s. ins. = semi inscripta; 's így épen nem a' latin szó *sinus* = kebel.

AM-nek, t. i. MP = N'P'. – Végre az AMDBD'N körívnek is, az adott határozat szerint, keble = NP = MP. Jegyezzük meg azt is, hogy *valamelly szöglet' vagy körív' keble nem egyéb, mint kétakkora körív' húrjának fele.* Ugyanis MP kebel, fele az MN-húrnak, és MA körív, fele az MAN-nek; mert a' kör' középpontjából a' húrra függőlegesen húzott vonal, mind a' húrt, mind a' körívet két egyenlő részre osztja.

A' keblek a' szögletekkel, vagy körívekkel együtt növekednek, bárha nem arányosan, egész az egyenesszög', vagy 90 foknyi körív' kebléig, melly = *körsugár* = R. A' tompa szögletek' keblei annál kisebbek, minél nagyobb a' tompa szöglet; mert minden tompa szöglet' keble épen az, mi az ötet 180 fokra egészitő hegyes szögleté. – Az egyenesszög' keblét, vagyis a' körsugárt, mivel a' többiek ennél mind kisebbek, 's ennek részei, nevezik *egész kebelnek* (sinus totus). Ha ezt megtesszük *egy*nek = 1: úgy a' többi kebleket törtszámokkal lehet kifejezni. Ha pedig az egész kebelt valami nagy számmal fejezzük ki, p. o. *tizezermilliό*val, – azaz képzeljük annyi egyenlő részekre elosztatni: úgy a' többi kebleket, – söt általában a' többi szögvonalakat is, – épszámokkal fejezhetjük ki, – mellyek azt mutatják, hogy azokban ennyi vagy amannyi akkora részek találtatnak, a' mekkora az *egész kebelben* tizezermillio van.

2) Valamelly szöglet', vagy az azt mérő körív' *érintőjének* (tangens) neveztetik *azon vonal, melly a' körív' egyik végpontjára húzható átmérőre függőleges, – a' körívet egy pontban érinti, és a' körív' másik végpontján keresztül húzott 's megnyujtott átmérő által határoztatik.* Így (id. 1.) az ACM szöglet' vagy AM

körív' érintője az AT, — a' BDM körívé is az AT, — az ADM' körívé is az AT, — az ADBN' körívé is az AT, — az ADBN N körívé is az AT = AT', mint ez az érintő' adott határozatából könnyen átlátható.

3) *Szelő*nek (secans) neveztetik azon *vonal, melly a' kör' középpontjából, a' körív' felső pontján keresztül húzatván, az érintő hosszát meghatározza;* — vagy feszes-oldala azon egyenes-szögü háromszögnek, mellynek egyik mellékoldala körsugár, vagy egész kebel, — másik pedig érintő. Így az AM, AMDM'N', ADM', ADM BD'N köríveknek szelőjök a' CT = CT'.

4) *Viszás-kebel*-nek (sinus versus) neveztetik az átmérő' azon része, melly a' körív' alsó pontjától a' kebelig nyúlik, p. o. az AM és ADBD'N körívek' viszáskeblük az AP, — az ADM' és ADBN' köríveké pedig az AP'. — Egyébaránt a' viszás kebel nem nagy figyelmet érdemel.

5) Valamelly szöglet' vagy körív' *pótkeble, pótérintője, pótszelője, pótviszáskeble* (cosinus, cotangens, cosecans, cosinus versus), mint fentebb is mondánk, nem egyéb, mint az azon szögletet, vagy körívet 90 fokra pótló szögletnek, vagy körívnek keble, érintője, szelője, viszás-keble. Így, mivel az MD körív az AM-nek pótléka: tehát az MQ vonal, melly az MD-nek keble, az AM-nek pótkeble, — és viszont, az MP, melly az AM körív' keble, az MD-nek pótkeble. — A' DS, melly a' DM-nek érintője, az AM-nek pótérintője; — a' CS, melly a' DM-nek szelője, az AM-nek pótszelője; és a' DQ, melly a' DM-nek viszás-keble, az AM-nek pótviszás keble, — és viszontag.

E' szerint, ha az AM körívet A-nak, a' DM-et B-nek nevezzük: lesz:

kebel. A = MP = *pótk.* B.
kebel. B = MQ = *pótk.* A.
érint. A = AT = *pótér.* B.
érint. B = DS = *pótér.* A.
szelő. A = CT = *pótsz* B.
szelő. B = CS = *pótsz.* A.
visz. keb. A = AP = *pótvisz.k.* B.
visz. keb. B = DQ = *pótvisz.k.* A.

Akármelly szögletnek vagy körívnek pótkeble ugyan sajátlag az ő pótszögletének vagy pótkörívének keble: de a' helyett lehet venni a' szöglet' alsó szárából, a' középponttól a' kebelig eső részt, p. o. az ACM szöglet' pótkeble ugyan sajátlag az MQ, de az helyett lehet venni a' CP-t, mert MQ = CP, egyközüek közt egyközüek.

7. §.

Képzeljük a' CM sugárt (id. 1.) a' C pont körül Id. 1. mozoghatónak, és tegyük fel, hogy lassanként közelednék a' CA sugár felé: ez által, valamint az ACM szöglet és AM körív, úgy az azokat illető kebel, érintő és szelő is kisebbekké lesznek, — ellenben a' pótkebel, pótérintő, és pótszelőhova tovább nagyobbodnak. Midőn az M pont az A pontot elfedi: akkor a' körív és szöglet semmikké lesznek, — valamint a' kebel is, — ellenben a' pótkebel lesz = sugár = R; az érintő lesz = o = semmi; — a' pótérintő egyközüvé lesz a' sugárral, ésígy annak folytatása által soha nem metszethetik, tehát lesz végetlen = ∞; — a' szelő egyenlő lesz a' sugárral = R; — a' pótszelő lesz végetlen = ∞. — Ezek szerint:

keb. o = o, ... *pótkeb.* o = R
érint. o = o, ... *pótérint* o = ∞
szelő o = R, ... *pótsz.* o = ∞

Továbbá tegyük fel, hogy az M pont, menvén az A-tól felfelé, az AD körív' közepén megállana: ekkor az AM és MD körívek egyenlők, 's mindenik $= 45^0$ lenne; és az MPC háromszög egyenes-szögű egyenszárú levén, benne illy egyenlet áll:

$$\overline{MC}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{PC}^2, \text{ vagy } \overline{MC}^2 = 2\overline{MP}^2;$$

ezen egyenletet sokszorozókra fejtvén:

$$1 \times \overline{MC}^2 = 2 \times \overline{MP}^2;$$

innen arány lesz:

$$\overline{MC}^2 : \overline{MP}^2 = 2 : 1$$

gyökeret vévén:

$$MC : MP = \sqrt{2} : 1$$

vagy: $R : \textit{keb.}\ 45^0 = \sqrt{2} : 1$

innen: $\text{keb. } 45^0 = \dfrac{R \times 1}{\sqrt{2}} = \dfrac{R \times 1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}$

vagy: $\text{keb. } 45^0 = \dfrac{R \times \sqrt{2}}{2}$,

és a' sugárt $= R$-et 1-nek tévén, — 's három tizedes tört-jegygyel megelégedvén:

$$\text{keb. } 45^0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}707.$$

E' szerint az MPC egyenesszögű egyenszárú háromszög' minden részei ismeretesek. Mert $MC = 1$, $MP = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $PC = MP = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; szögletei közül egy egyenes, a' többi 45 — 45 foknyi. — Hasonlóul a' TAC háromszögben minden szögletek egyenlők az MPC háromszög' megfelelő szögleteivel; az oldalok pedig AT és AC egyenlők, 's mindenik $= R = 1$. Innen

$$\overline{CT}^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

és $CT = \sqrt{2}$.

azaz *érint.* $45^0 = R = 1$

szelő. $45^0 = \sqrt{2}$.

Továbbá képzeljük, hogy az M pont folytassa mozgását: midőn a' D pontra jut, akkor az általa leírott körív lesz $= 90^0$, — és ekkor a' kebel lesz sugár, — a' pótkebel = semmi, — az érintő, melly sebesen nőtt, itt egyközüvé lett a' CD sugárral, 's ennek folytatása által soha sem vágathatván, lesz = végetlen. E' szerint

keb. $90^0 = R$ . . . . pótk. $90^0 = o$

érint. $90^0 = \infty$ . . . . pótér. $90^0 = o$

szelő $90^0 = \infty$ . . . . pótsz. $90^0 = R$

8. §.

Ha az M pont, (id. 1.) mozgásában eljut az M'-ig: a' körív nagyobb lesz 90^0-nál, — ennek keble M'P', melly az AM'-et egészitő BM' körívnek is keble. 'S így, mint már mondánk, az egymást kölcsönösen egészitő két körívek' keble ugyanaz. És mivel M'B = AM: tehát az AM' körív' keble ugyanaz, a' mi az AM-mé = MP. — Továbbá az ADM' körív *pótkeble* = P'C, ugyanaz, a' mi a' BM' körívé, — egyenlő a' CP-vel, t. i. az AM körív' pótkeblével; de mivel az ellenkező oldalon esik, ennek kijelentésére nemleges (—) jegy tétetik elibe; úgy hogy általában *valamelly körív pótkeble épen az, a' mi az ezen körívet 180 fokra egészitő körív' pótkeble, de nemlegesen véve.* Id. 1.

Hogy ezt átláthatóbbá tegyük, a' körív' kezdőpontja legyen mindig az A-nál, 's nevezzük az AM (változó nagyságú) körívet A-nak. Már áll ez:

$$AP = R - \text{pótkeb. } A.$$

Ezen képlet kifejezi az A pontnak a' kebel' alsó pontjátóli távolságát, akármekkora legyen az AM körív. Már ha az M pont az M'-re megy, úgyhogy AM körív AM'-mé nö, 's ezt nevezzük A-nak: most is

$$AP' = R - \text{pótk. } A,$$

$$-AP' = -R + \text{pótk. } A,$$

$$\text{pótk. } A = R - AP' = AC - AP' = -CP',$$

tehát az AM' körív' pótkeble nemleges.

Általában ebben megegyeztek a' mértanárok, hogy *a' DD' átmérő mellett balról eső pótkeblek igenlegesek, a' jobbról esők pedig, amazokhoz képest, nemlegesek, továbbá hogy az AB átmérő felett eső keblek igenlegesek, — az alatta esők pedig, amazokhoz képest, nemlegesek.*

Hasonlóul *az AM' körívre nézve az érintő és pótérintő nemlegesek.*

Végre ha a' CM sugár folytatván mozgását, M végpontjával a' B pontra jut: itt a' keblek és érintők fogydogálván, a' pótkeblek és pótérintők pedig növekedvén, lesz:

$$\text{keb. } 180^0 = 0,$$

$$\text{pótkeb. } 180^0 = -R,$$

$$\text{érintő } 180^0 = -0$$

$$\text{pótér. } 180^0 = -\infty.$$

9. §.

A' félkörnél nagyobb mértékü szögletek' szögvonalai ritkán jönek ugyan elő: de mégis lássunk rólok valamit.

Ha az M pont az N'-hez jut: akkor az AMDM'BN', körív nagyobb 180 foknyinál; ennek keble N'P' pótkeble CP'. A' mint közeledik az N' pont a' D' ponthoz:

ahhoz képest nő a' kebel, — ellenben fogy a' pótkebel, — és ezen vonalak mindketten nemlegesek. — A' D' pontnál, hol az ADBD' körív $= \frac{3}{4}$ körület, $=$ 270 fok, a' kebel $= -$ R, a' pótkebel $=$ o.

Végre a' D' ponttól az A-ig, a' kebel p. o. PN mindig az AB átmérö alatt van, — ésígy mindig nemleges, és mindig fogyatkozik; ellenben a' pótkebel, p o. CP visszatért a' DD' átmérö' baloldalára, 's így igenleges, 's mindig növekszik egész az A pontig. Az A pontnál: *kebel* $360^0 =$ o, *pótkeb.* $360^0 = +$ R.

MÁSODIK CZIKKELY.

A' háromszögtani függvényeik', vagy szögvonalak' kikereséseről, 's kiszámitásaról.

10. §.

A' kebel' és pótkebel' négylegeik' összege annyi, mint a' sugár' vagy egész kebel' négylege.

Ugyanis az MPC háromszögben:

$$\overline{MP}^2 + \overline{PC}^2 = \overline{MC}^2,$$

vagy az AM körívet A-val, az MC sugárt pedig R-rel fejezvén ki:

$$(O) \ldots\ldots \overline{\text{keb.}}^2 A + \overline{\text{pótk.}}^2 A = R^2.$$

Ezen egyenletből folyik hogy:

$$\text{keb. } A = \pm \sqrt{R^2 - \overline{\text{pótk.}}^2 A}$$

$$\text{pótk. } A = \pm \sqrt{R^2 - \overline{\text{keb.}}^2 A}.$$

Innen látnivaló hogy, ha valamelly körív' keble kiadatik, abból annak pótkeblét ki lehet számítni, és viszont. — A' kettős jegyek ($\pm$) ezen képletekben azért tétettek, mert ugyanazon kebel, p. o. MP (id. 1.) két körívnek, AM, és AM′ felel meg, mellyeknek pótkeblei, CP és CP′ egyenlők, de ellenkező jegyűek. Hasonlóul a' CP, pótkeble az AM és AN köríveknek, de ellenkező jegyekkel; melly köríveknek kebleik is, MP és PN egyenlők, de ellenkező jegyűek.

11. §.

Id. 2. *Ismervén valamelly A körív' keblét és pótkeblét: megtalálhatni annak érintőjét, szelőjét, pótérintőjét, pótszelőjét.*

Ugyanis: mivel (id 2.) a' CAT és CMP háromszögek hasonlók: azokban illy arányok állanak:

CP : CA = PM : AT, ... pótk. A : R = keb. A : ér. A

vagy:

CP : CA = CM : CT, ... pótk. A : R = R : szel. A.

Hasonlóul a' CQM és CDS háromszögek hasonlók levén, illy arányokat adnak:

CQ : CD = QM : DS, ... keb. A : R = pótk. A : pótér. A.

vagy:

CQ : CD = CM : CS, ... keb. A : R = R : pótszel. A.

Ezen négy arányokból e' következő négy képletet lehet lehozni.

$$(P) \ldots \begin{cases} \textit{érintő } A = \dfrac{R \times \text{keb. } A}{\text{pótk. } A} \\[2ex] \textit{szelő } A = \dfrac{R^2}{\text{pótk. } A} \\[2ex] \textit{pótérint. } A = \dfrac{R \times \text{pótkeb. } A}{\text{keb. } A} \\[2ex] \textit{pótszelő } A = \dfrac{R^2}{\text{keb. } A.} \end{cases}$$

Ezen képletek' segitségével, bármelly körívre nézve, mellynek keble és pótkeble kiadatik, a' o—tól a' 360^0—ig, minden háromszögtani függvényeket, vagy szögvonalakat, mind értékeikre, mind jegyeikre nézve, ki lehet keresni.

12. §.

Látánk a' 10. és 11-dik §-ban, hogy ezen hét mennyiséget illetöleg: R, keb.A, pótkeb.A, érintö. A, pótér.A, szelöA, pótsz.A, az (O) és (P) alatti képletekben öt egyenletet birunk. Innen látnivaló, hogy ha ezen hét mennyiségek közül kettö kiadatik: a' többi ötöt kikereshetjük. Lássunk a' lehetö módosítások 's összeillesztések közül csak néhányat, — mellyekre netalán szükségünk lesz.

1) Ha a' (P) alatti elsö egyenletböl a' *keb. A*' értékét $= \dfrac{\text{érint.A} \times \text{pótk.A}}{R}$, az (O) képletben helyettesítjük: lesz

$$\frac{\overline{\text{érint.}}^2 A \times \overline{\text{pótk.}}^2 A}{R^2} + \overline{\text{pótk.}}^2 A = R^2,$$

innen: $\overline{\text{ér.}}^2 A \times \overline{\text{pótk.}}^2 A + \overline{\text{pótk.}}^2 A \times R^2 = R^4$

innen: $(R^2 + \overline{\text{ér.}}^2 A) \times \overline{\text{pótk.}}^2 A = R^4$

innen: $R^2 + \overline{\text{érint.}}^2 A = \dfrac{R^4}{\overline{\text{pótk.}}^2 A}.$

Azonban mivel (P) alatti második egyenlet szerint:

$$\text{szelö } A = \frac{R^2}{\text{pótk. } A)}, \quad \text{tehát}$$

$$\overline{\text{szelö.}}^2 A = \frac{R^4}{\overline{\text{pótk.}}^2 A}$$

innen: $R^2 + \overline{\text{érint.}}^2 A = \overline{\text{szelö.}}^2 A.$

Ezen képlet' helyes volta nyilván van a' CAT egyenes-
1a. á. szögü háromszögben (id 3), mellyben

$$\overline{AC}^2 + \overline{AT}^2 = \overline{CT}^2, \text{ vagy sbt.}$$

2) Hasonlóul a CDS háromszögben:

$$\overline{CD}^2 + \overline{DS}^2 = \overline{CS}^2,$$

vagy: $R^2 + \overline{\text{pótér.}}^2 A = \overline{\text{pótszel}}^2 A.$

3) Ha a' (P) alatti egyenletek közül az elsőt és harmadikat egymással sokszorozzuk, lesz:

$$\text{ér. } A \times \text{pótér. } A = \frac{R^2 \times \text{keb. } A \times \text{pótk } A}{\text{pótk. } A \times \text{keb. } A},$$

vagy: $\text{ér. } A \times \text{pótér. } A = R^2$

innen: $\text{érint. } A = \dfrac{R^2}{\text{pótér. } A}$

és: $\text{pótér } A = \dfrac{R^2}{\text{ér. } A.}$

Ugyanezen képletet más akármelly korívre — mellyet nevezzünk B-nek — alkalmazhatjuk, 's lesz:

$$\text{ér. } B. = \frac{R^2}{\text{pótér. } B.}, \text{ és: pótér. } B. = \frac{R^2}{\text{ér. } B.};$$

$$\text{innen: ér. } A : \text{ér. } B = \frac{R^2}{\text{pótér. } A} : \frac{R^2}{\text{pótér. } B},$$

és (Számtan. 140 § szerint):

$$\text{ér. } A : \text{ér. } B = \text{pótér. } B : \text{pótér. } A.$$

Honnan látnivaló, hogy *két korívek' érintői, ugyanazoknak pótérintőivel fonák viszonyban vannak.*

13. §.

Alkalmazzuk a' (P) alatti képleteket a' 30 foknyi korív' függvényeinek kikeresésére.

Mivel a' körsugárt = R-et, a' körületre, mint húrt, 6-szor lehet letenni, — és így az, mint húr $\dfrac{360}{6} =$

60 foknyi korívnek felel meg; a' kebel pedig nem egyéb, mint két akkora körív' húrjának fele: innen látnivaló, hogy 30 foknyi körív' keble $= \frac{1}{2} R = 0,5$, ha $R = 1$.

Hogy a' többi függvényeit megtalálhassuk: ezen értéket: keb. $30^0 = 0,5$, az (O) és (P) alatti egyenletekben helyettesítsük, — megelégedvén most 3 tizedes jegyekkel:

$$\text{keb. } 30^0 = \text{pótk. } 60^0 = \tfrac{1}{2} = 0,500;$$

$$\text{pótk. } 30^0 = \text{keb. } 60^0 = \sqrt{R^2 - \overline{\text{keb.}}^2 A} = \sqrt{1 - \tfrac{1}{4}}$$

$$= \sqrt{\tfrac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866;$$

$$\text{érint. } 30^0 = \text{pótér. } 60 = \frac{R.\text{keb. } 30^0}{\text{pótk. } 30^0} = \tfrac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{1.2}{\sqrt{3}.2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,577;$$

$$\text{pótér. } 30^0 = \text{érint. } 60^0 = \frac{R.\text{pótk. } 30^0}{\text{keb. } 30^0} = \frac{\sqrt{3}}{2} : \tfrac{1}{2}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} = 1,732;$$

$$\text{szelő. } 30^0 = \text{pótsz. } 60^0 = \frac{R^2}{\text{pótk. } 30^0} = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1,154;$$

$$\text{pótszelő } 30^0 = \text{szelő } 60^0 = \frac{R^2}{\text{keb. } 30^0} = 2,000.$$

14. §.

Adatván két körív' keble, és pótkeble: ezen két körív' összegének, és különbségének keblét, és pótkeblét meglehet találni Id. 4.

Erre nézve a' C középpontból, CA sugárral körívet irván, felveszünk ezen egy darabot AB, mellyet jelenisen a, — ismét másik darabot is BD, mellyet jelentsen b; ha ezen BD = BM: úgy az AD = $a \quad b$, — és AM = $a - b$. A' B, M, és D pontokból eresszünk függönyöket az AC sugárra, — húzzuk a' CB sugárt, és MD húrt. — A' BE vonal, keble az a körívnek, — a' CE pótkeble ugyanannak; — a' DI a' b körívnek keble, CI pótkeble; a' DF azon két körív' $(a + b)$ összegének keble, CF pótkeble; — az MP, keble a' különbségnek $(a-b)$, — a' CP pótkeble. Ezek így levén: miután a' két külön körivek' (AB és BD) keblei és pótkeblei kiadattak: meg kell találni ezek' összegének és különbségének kebleit és pótkebleit. — Eresszük le az IK-t függőlegesen a' CA-ra, — és húzzuk az IL és MG két vonalat függőlegesen a' DFre. — Az MNI és ILD háromszögek hasonlók levén, megfelelö oldalaik arányosok, ésígy valamint MI = ID: úgy IN = DL, és MN = IL. — Felvévén már az ismeretlen szögvonalakat: lesz:

$$\begin{aligned} DF &= \text{keb.}\ (a + b) = IK + DL, \\ CF &= \text{pótkeb.}\ (a + b) = CK - IL, \\ MP &= \text{keb.}\ (a - b) = IK - DL, \\ CP &= \text{pótk.}\ (a - b) = CK + IL. \end{aligned}$$

Már a' CBE és CIK háromszögek hasonlók levén: illy arányokat adnak:

$$CB : CI = BE : IK.$$

$$\text{azaz: } R : \text{pótk.}\, b = \text{keb.}\ a : IK;$$

$$\text{és: } CB : CI = CE : CK,$$

$$\text{azaz: } R : \text{pótk.}\ b = \text{pótk.}\ a : CK.$$

Hasonlóul a' CBE és DIL háromszögek' oldalai egymásra, megfelelöleg, függőlegesek levén, illy arányokat adnak:

$$CB : DI = BE : IL,$$
azaz. $R : \text{keb.}b = \text{keb.}\ a : IL$;
és: $CB : DI = CE : DL,$
azaz: $R : \text{keb.}b = \text{pótk.}a : DL.$

Ezen négy arányokból, e' következö négy egyenletek származnak:

$$IK = \frac{\text{keb}\ a \times \text{pótk.}\ b.}{R}, \Big) \quad IL = \frac{\text{keb.}\ a \times \text{keb.}\ b}{R}$$

$$CK = \frac{\text{pótk.}\ a \times \text{pótk.}\ b}{R}, \Big) \quad DL = \frac{\text{keb.}\ b \times \text{pótk.}\ a}{R}$$

A fentebbi kifejezetekben, — miszerint $IK + DL = \text{keb.}\ (a + b)$ sbt, ezen értékeket helyettesítvén, — következö képleteket birjuk:

$$(Q)\ldots \begin{cases} \text{keb.}(a+b) = \dfrac{\text{keb}\ a \times \text{pótk.}\ b + \text{keb.}\ b \times \text{pótk.}\ a}{R} \\ \text{pótk}(a+b) = \dfrac{\text{pótk.}\ a \times \text{pótk.}\ b - \text{keb.}\ a \times \text{keb.}\ b}{R} \\ \text{keb.}(a-b) = \dfrac{\text{keb.}\ a \times \text{pótk.}\ b - \text{keb.}\ b \times \text{pótk.}\ a}{R} \\ \text{pótk}\ (a-b) = \dfrac{\text{pótk.}\ a \times \text{pótk.}\ b + \text{keb.}\ a \times \text{keb.}\ b.}{R} \end{cases}$$

Ezek valának a' keresett képletek.

15. §.

Ha az elöbbi §-ban $a = b$: az adott képletek illy alakot öltenek:

$$(R)\ldots \begin{cases} \text{keb.}\ 2\ a = \dfrac{2\ \text{keb.}\ a \times \text{pótk.}\ a}{R}, \\ \text{pótk.}\ 2\ a = \dfrac{\overline{\text{pótk.}}^2\ a - \overline{\text{keb.}}^2\ a.}{R} \end{cases}$$

Ezen képletek' segitségével, *valamelly körívnek kiadott kebléből és pótkebléből, a' kétakkora körív' keblét és pótkeblét lehet megtalálni.*

16. §.

Miután tudjuk, hogy: $\text{pótk.}^2 a = R^2 - \text{keb.}^2 a$, — és $\text{keb.}^2 a = R^2 - \text{pótk.}^2 a$: ha a' fentebbi 15. §-ban a' *pótk.2a*' kifejezetében, egyszer a' $\text{pótk.}^2 a$, máskor a' $\text{keb.}^2 a$ helyett ezen értéket tesszük, lesz:

$$R.\ \text{pótk.}2a = R^2 - 2\ \text{keb.}^2 a$$
$$R.\ \text{pótk.}2a = 2\ \text{pótk.}^2 a - R^2;$$

és innen:

$$\text{keb.}a = \sqrt{\tfrac{1}{2} R^2 - \tfrac{1}{2} R.\ \text{pótk.}\ 2a}.$$
$$\text{pótk.}a = \sqrt{\tfrac{1}{2} R^2 + \tfrac{1}{2} R.\ \text{pótk.}\ 2a}.$$

Tegyük fel, hogy $2a = A$, innen: $a = \tfrac{1}{2} A$, 's e' szerint lesz:

$$(S)\ldots\begin{cases}\text{keb.}\ \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\tfrac{1}{2} R^2 - \tfrac{1}{2} R.\ \text{pótk.}\ A,}\\ \text{pótk.}\ \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\tfrac{1}{2} R^2 + \tfrac{1}{2} R.\ \text{pótk.}\ A.}\end{cases}$$

Ezen képletek' segitségével, *valamelly körívnek kiadatott kebléből és pótkebléből, felényi körív' keblét és pótkeblét lehet megtalálni.*

17. §.

Ha az (S) alatti képleteket négyleghatványra emeljük, 's azokból a' *pótk.A*' értékét kifejtjük, ismét következő új képleteket nyerünk:

$$(T)\ldots\begin{cases}\text{pótk.}\ A = \dfrac{R^2 - 2\text{keb.}^2 \tfrac{1}{2} A}{R}\\ \text{pótk.}\ A = \dfrac{2\text{pótk}^2 \tfrac{1}{2} A - R^2}{R}\end{cases}$$

Ezen képletek' segitségével *ki lehet keresni valamelly köriv' pótkeblét, ha a' felényi köriv' keble vagy pótkeble kiadatik.*

18. §.

Az eddig előadott alap-képleteket most már szedjük össze, 's egyszerüsítsük az által, hogy mindezeket ollyan körböli körívekre vitetendőknek tekintsük, mellynek sugara egység gyanánt vétetik. Ha tehát $R = 1$, így lesznek a' képletek:

(1)..... $\text{keb. } A = \pm\sqrt{1 - \text{pótk.}^2\, A}$,

(2).... $\text{pótk. } A = \pm\sqrt{1 - \text{keb.}^2\, A}$,

(3)..... $\text{érint. } A = \dfrac{\text{keb. } A}{\text{pótk.} A} = \dfrac{1}{\text{pótér. } A}$

(4) .... $\text{pótér.} A = \dfrac{\text{pótk.} A}{\text{keb.} A} = \dfrac{1}{\text{érint. } A.}$

(5)... $\text{szelő } A = \dfrac{1}{\text{pótk. } A.}$

(6)... $\text{pótszelő } A = \dfrac{1}{\text{keb. } A.}$

(7).. $\text{keb. } (a \pm b) = \text{keb. } a \times \text{pótk. } b \pm \text{keb. } b \times \text{pótk.} a.$

(8).. $\text{pótk. } (a \pm b) = \text{pótk.} a \times \text{pótk.} b \mp \text{keb. } a \times \text{keb. } b.$

(9)... $\text{keb. } 2a = 2\,\text{keb. } a \times \text{pótk. } a.$

(10).. $\text{pótk. } 2a = \text{pótk.}^2\, a - \text{keb}^2\, a.$

(11)... $\text{keb. } {}^1\!/_2\, A = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \text{pótk. } A}{2}}$

(12).. $\text{pótk. } {}^1\!/_2\, A = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \text{pótk. } A}{2}}$

(13)... $\text{pótk. } A = 1 - 2\,\text{keb}^2\, {}^1\!/_2\, A.$

(14).. $\text{pótk. } A = 2\,\text{pótk.}^2\, {}^1\!/_2\, A - 1,$

(15)... $\text{viszás kebel } A = 1 - \text{pótk. } A = 2\,\text{keb}^2\, {}^1\!/_2\, A.$

De ha a' sugárt = R-et nem = 1-nek vesszük: úgy a' fentebb lehozott képletek szerint, mindezekbe az egyenletekbe bele kell jöni az R-nek is.

19. §.

Ha egy körnegyed' minden fokainak és perczeinek szögvonalai ki volnának számítva: akkor már a' többi körnegyedeket illető szögvonalak, — 's egyszermind minden pótszögvonalak is készen volnának. Mert a' többi körnegyedeken, a' szögvonalak' hossza épen az, a' mi az elsön; valamelly körív' pótszögvonala pedig épen az, melly az ölet 90^0-ra pótló körív' szögvonala, — p. o. 25^0 keble épen az, a' mi 65^0 pótkeble, — és 65^0 keble épen az, a' mi 25^0 pótkeble. — Azonban azt is látánk, hogy a' sugárból, 's kebelből, és pótkebelből a' többi szögvonalakat mind ki lehet számítni; — 's innen fö dolog a' keblek' és pótkeblek' kiszámitása. — Ki is számitották ezeket a' mértanárok; 's rendbe összeszedvén, az ezeket elöterjesztö lapokat nevezik *háromszögtani függvények' tábláinak* (tabulae, seu canones functionum trigonometricarum). Az illynemü táblákban, vagy 0^0-tól 90^0-ig vannak feltéve a' függvények, olly móddal, hogy két szemben esö lapok közül az egyiken levö körív, a' másik lapon, egy menetelben esö korívnek pótléka, p. o. egyik lapon a' hol fekszik 20^0, a' másik lapon, azzal egy menetelben 70^0 esik, — 's igy ámbár mindeniknek csak függvényei vannak feltéve, de ha valamellyiknek pótfüggvénye kivántatik, azt a' másiknak, t. i, a' pótlékkörívnek függvénye mutatja. — Vagy pedig 0^0-tól 45^0-ig fel vannak téve mind a' függvények, mind a' pótfüggvények, — de minden fok után, külön oszlopban, feljegyeztetnek a' pótló körívek, mellyeknek a' feltett függvények pótfüggvényei, a' feltett pótfüggvények pedig függvényei.

Azonban mivel a' mértanárok leginkább csak a' kebleknek, pótkebleknek, érintőknek 's pótérintőknek veszik hasznukat: tehát a' táblákban is csak ezek vannak, az előadott módon, feltéve.

Mivel pedig a' függvények nagy számok, 's számitásuk logarithmusok' segitségével könnyebben megy: innen a' függvények' tábláiban, vagy a' függvények mellé, külön oszlopban, a' megfelelő logarithmusok is feltetetnek; — vagy pedig maguk a' függvények el is mellőztetnek, 's egyedül csak az azokat illető logarithmusok tetetnek fel.

Nem akarván itt hosszasan beszélni a' logarithmusok' használatáról, melly a' *számtan*ban elő van adva; csak ennyit jegyezzünk meg, hogy ha a' sugárt egynek vesszük, $R = 1$: úgy ahhoz képést a' keblek és pótkeblek mindnyájan, — 's az érintőknek és pótérintőknek is nagy részök, törtszámok, — 's az ezeknek megfelelő logarithmusok nemlegesek lesznek. Már hogy a' nemleges logarithmusokat elkerüljék a' mértanárok: erre nézve a' függvényi táblákban, az R = tízezermilló-nak vétetik, mellynek logarithmusa = 10, — 's ezen tízezermillióhoz képest a' legkisebb függvények is épszámokkal fejeztetnek ki; azonban a' sugárhozi viszonyuk, akár ama törtszámoknak az 1-hez, akár emez épszámoknak a' tízezermillióhoz, mindegy; úgy hogy a' táblákbani függvényeket tetszés szerint tekinthetjük, akár tizedes törtjegyeknek, ha az R-et

1-nek vesszük, — akár épszámoknak, ha R = 10,000·000,000.

Azonban a' háromszögtani — akár függvények' kikeresését, akár háromszögek' kifejtését illető — képletek körül, ha logarithmusokkal akarunk dolgozni, vigyázni kell, hogy az R, vagyis annak logarithmusa = 10, ki ne maradjon; — 's innen a' függvények' kikeresését illetőleg' nem a' 18-§-ban egyszerüsített, hanem a fentebb kifejtett eredeti képletek szerint kell dolgozni. p. o.

$$\text{érint. A} = \frac{\text{keb. A}}{\text{pótk. A.}} = \frac{1}{\text{pótér. A.}} = \frac{\text{R}}{\text{pótér.A}}\cdot$$

logarithmusokkal lesz:

log. érint. A = log. keb. A — log. pótk. A.

vagy: log. érint. A = 10 — log. pótér. A.

Hasonlóul: tudván, hogy keb. $20^0 = 0,34200 \times R$,

innen: log. keb. 20^0 = log. 0,34200 + log. R,

log. keb. $20^0 = -\ 0,4659739 + 10$

log. keb. $20^0 = 9,5340261$.

20. §.

Tudjuk a' vonaltanból, hogy ha a' körsugár = 1: akkor a' körület = 6,2831852....; innen a' körnegyed = 1,5707963...., — innen egy másodpercznyi körív, t. i. $1'' = 0,00000485$ Az $1''$-nyi körív' ezen értéke igen keveset különböz az ezen $1''$-nyi körív' keblétől, úgy hogy egyiket a' másik helyett bátran vehetjük. Ésígy keb.$1'' = 0,00000485$. — Már a' 18. §-ban adott képletek közt a' (2) szerint kiszámíthatni az $1''$-nyi körív' pótkeblét. Továbbá a' (9) és (10) képletek szerint, sorba ki lehet számítni a' $2''$, 4″, 8″, 16″, 32″, 64″ kebleit és pótkebleit. — Továbbá ha 64″ = a, és 4″ = b: a' (7) és (8) képletek' második idoma szerint ki lehet számítni a' 60″ = 1′-nyi körív' keblét és pótkeblét. Ezen két szögvonalakkal épen olly mütételt vivén véghez, mint előbb az 1″-nyi-re nézve: kikereshetni az 1°, 2°, 4°, 8°, 16°, 32°; 10°, 20°, 40°, 'sat. körívek' kebleit és pótkebleit; — 's könnyü átlátni, hogy az előadott képletek' különböző módosítása 's összeillesztése által, minden fokoknak, és első 's másod perczeknek megfelelő kebleket és pótkebleket, 's azokból a' többi szögvonalakat is kikereshetni.

21. §.

Ha felveszszük a' 14-dik §-ban lehozott ezen képleteket:

R. keb. $(a+b)$ = keb. a × pótk. b + keb. b × pótk. a,
R. pótk. (a + b) = pótk. a × pótk. b — keb. a × keb. b,
R. keb. (a — b) = keb. a × pótk. b — keb. b × pótk. a.
R. pótk. (a — b) = pótk. a × pótk b + keb a × keb b;

's ha ezeket páronként, összeadás, kivonás, sokszorozás, elosztás által módosítjuk: 24 változatok fognak előállni. Mi ezek közül csak néhány szükségesebbeket említsünk meg.

1) *Ha az elsőt és harmadikat összeadjuk: lesz:*
keb. a × pótk. b = ½ R. keb. (a + b) + ½ R. keb. (a—b).

2) *Ha az elsőből a' harmadikat kivonjuk: lesz:*
keb. b × pótk. a = ½ R. keb. (a + b) — ½ R. keb. (a—b).

3) *Ha a másodikat és negyediket összeadjuk: lesz:* pótk. a $\times$ pótk. b $= \frac{1}{2}$ R. pótk. (a + b) + $\frac{1}{2}$ R pótk. (a—b).

4) *Ha a' másodikat a' negyedikből kivonjuk: lesz:* keb. a $\times$ keb b $= \frac{1}{2}$ R. pótk (a — b) — $\frac{1}{2}$ R. pótk (a+b).

Ezen képletek' segitségével, *több keblek' és pótkeblek' sokszorozmányát összeggé, vagy összegét sokszorozmánynyá átváltoztathatni.*

22. §.

Továbbá ha ugyanazon fentebbi képleteket *egymással páronként elosztjuk*, lesz:

$$\frac{\text{keb. }(a \pm b)}{\text{pótk. }(a \pm b)} = \frac{\text{keb. a} \times \text{pótk. b} \pm \text{keb. b} \times \text{pótk. a}}{\text{pótk. a} \times \text{pótk. b} \mp \text{keb. a} \times \text{keb. b}};$$

úgyde: $\dfrac{\text{keb. }(a \pm b)}{\text{pótk. }(a \pm b)} = \dfrac{\text{érintő }(a \pm b)}{R}$; innen:

$$\frac{\text{érint. }(a \pm b)}{R} = \frac{\text{keb. a} \times \text{pótk. b.} \pm \text{keb. b} \times \text{pótk. a}}{\text{pótk.a} \times \text{pótk. b.} \mp \text{keb. a} \times \text{keb. b.}}$$

Ha ezen egyenlet' hátulsó részének mind számlálóját, mind nevezőjét, *pótk. a $\times$ pótk. b*-vel elosztjuk, lesz:

$$\left(\frac{\text{keb. a}}{\text{pótk. a}} \pm \frac{\text{keb. b}}{\text{pótk b}}\right) : \left(1 \mp \frac{\text{keb. a}}{\text{pótk. a}} \times \frac{\text{keb. b}}{\text{pótk b}}\right)$$

vagy: mivel $1 = R$, és $\dfrac{\text{keb. a}}{\text{pótk. a}} = \dfrac{\text{érint. a}}{R}$, lesz:

$$\left(\frac{\text{érint. a} \pm \text{érint. b}}{R}\right) : \left(R \mp \frac{\text{ér. a}}{R} \times \frac{\text{ér. b}}{R}\right), \text{ vagy}$$

$$= \frac{R^2 (\text{ér. a} \pm \text{ér. b}}{R^2 \mp \text{ér. a} \times \text{ér. b}}$$ 'S így az előbbi egyenlet:

$$\text{érintő }(a \pm b) = \frac{R^2 (\text{ér. a} \pm \text{ér. b})}{R^2 \mp \text{ér. a} \times \text{ér. b}}$$

Ezen képlet segitségével, *két körív' összegének, vagy különbségének érintőjét lehet megtalálni, ha azon két körívek' érintői külön kiadatvák.*

23. §.

Ha a' 21-ik §-bani alapképleteket ismét elővesszük, de úgy, hogy legyen $a + b = p$, és $a - b = q$, — a' honnét (ezen két egyenlet összeadatván) lesz: $a = \frac{1}{2}(p + q)$, és $b = \frac{1}{2}(p - q)$: ezekből ismét új képleteket lehet lehozni.

Jelesen:

1) *Az elsőt és harmadikat összeadván:*

$$\text{keb.}\, p + \text{keb.}\, q = \frac{2}{R}\, \text{keb.}\, \tfrac{1}{2}(p+q) \times \text{pótk.}\, \tfrac{1}{2}(p-q);$$

2) *Az elsőből a' harmadikat kivonván:*

$$\text{keb.}\, p - \text{keb.}\, q = \frac{2}{R}\, \text{keb.}\, \tfrac{1}{2}(p-q) \times \text{pótk.}\, \tfrac{1}{2}(p+q);$$

3) *A' másodikat és negyediket összeadván:*

$$\text{pótk.}\, p + \text{pótk.}\, q = \frac{2}{R}\, \text{pótk.}\, \tfrac{1}{2}(p+q) \times \text{pótk.}\, \tfrac{1}{2}(p-q);$$

4) *A' másodikat a' negyedikből kivonván:*

$$\text{pótk.}\, q - \text{pótk}\, p = \frac{2}{R.}\, \text{keb.}\, \tfrac{1}{2}(p+q) \times \text{keb.}\, \tfrac{1}{2}(p-q)$$

Ezen képleteket, két tagok' egybefogására használhatni.

24. §

Ha az épen most lehozott képletek közül az elsőt a' másodikkal elosztjuk, — 's el nem felejtjük, hogy $\frac{\text{keb.}}{\text{pótk.}}$ = érintő; és hogy a' számtani szabályok szerint:

$$\frac{a \times b}{c \times d} = \frac{a}{c} : \frac{d}{b}, \text{ tehát lesz:}$$

$$\frac{\text{keb. p} + \text{keb. q}}{\text{keb p} - \text{keb. q}} = \frac{\text{érint. } \tfrac{1}{2}(p+q)}{\text{érint. } \tfrac{1}{2}(p-q)}.$$

Ha ezen egyenlet' tagjaiból arányt csinálunk: [keb p + keb. q] : [keb. p — keb. q] = [ér. $\frac{1}{2}$ (p + q)] : [ér. $\frac{1}{2}$ (p — q)].

Azaz: *Két körív' keblének összege, úgy van ugyanazon keblek' különbségéhez: a' mint van azon körívek' félöszszegének érintője, a' körívek' félkülönbségének érintőjéhez.*

Végre, megjegyezvén, hogy: $\frac{\text{érint.}}{R} = \frac{R}{\text{pótér}}$, az előbbi módon még következő képleteket lehet lehozni:

$$\frac{\text{keb p} + \text{keb. q}}{\text{pótk. p} + \text{pótk. q}} = \frac{\text{érint. } \tfrac{1}{2}(p+q)}{R};$$

$$\frac{\text{keb. p} + \text{keb. q}}{\text{pótk. q} - \text{pótk. p}} = \frac{\text{pótér } \tfrac{1}{2}(p-q)}{R};$$

$$\frac{\text{keb. p} - \text{keb. q}}{\text{pótk. p} + \text{pótk. q}} = \frac{\text{érint } \tfrac{1}{2}(p-q)}{R};$$

$$\frac{\text{keb. p} - \text{keb. q}}{\text{pótk. q} - \text{pótk. p}} = \frac{\text{pótér } \tfrac{1}{2}(p+q)}{R};$$

$$\frac{\text{pótk. p} + \text{pótk. q}}{\text{pótk. q} - \text{pótk. p.}} = \frac{\text{pótér. } \tfrac{1}{2}(p+q)}{\text{érint. } \tfrac{1}{2}(p-q)},$$

melly képletekből arányok képeztetvén, ugyanannyi állítmányokat szólgáltatnának.

HARMADIK CZIKKELY.

A' síkháromszögek' kifejtését illető alaptételek.

25. §.

A' síkháromszögek' kifejtésére nézve, az eddig mondottakon kivül, a' következő öt alaptételeket tanuljuk meg:

„Első alaptétel": Minden egyenesszögű háromszögben, az egész kebel = R, vagy a' függvények' táblaiban felvett sugár, úgy van akármellyik hegyes szöglet' kebléhez: mint a' feszes-oldal, a' kérdéses hegyes szöglettel átellenes mellékoldalhoz.

Vegyük fel az FEC egyenes-szögű háromszöget (id. 3). A' C középpontból, akárminő sugárral CA, melly a' táblákbani sugárt = R-t mutassa, irjuk az AM korívet; 's eresszük le az MP-t függőlegesen a' CA-ra A' CEF és CMP hasonló háromszögekben illy arányok állnak. Id. 3.

$$CM : MP = CF : FE,$$

azaz: $R : \text{keb. } ECF = CF : FE.$

Ezt kellett megmutatni.

Ha meggondoljuk, hogy a' mi az ECF szöglet' keble, ugyanaz az az EFC-nek pótkeble: az adott alaptétel másként igy áll: *a' táblákbani sugár úgy van valamellyik hegyes szöglet' pótkebléhez, mint a' feszes-oldal' a' felvett hegyes szöglet mellett fekvő mellékoldalhoz.*

26. §.

„Második alaptétel." Bármelly egyenesszögű háromszögben úgy van a' táblákbani-sugár, vagy egész

kebel, valamellyik hegyes szöglet' érintőjéhez: mint a' felvett szöglet mellett eső mellékoldal, az ezen szöglettel általellenes mellékoldalhoz.

Id. 3. Ugyanis emelvén az AM korívnek AT érintőjét (id. 3): a' CEF és CAT hasonló háromszögekben illy arány áll:

CA : AT = CE : EF,

azaz: R : érint. ECF = CE : EF.

Ezt kellett megmutatni.

Ha meggondoljuk, hogy: *érint.* ECF = *pótér.* EFC: a' most adott alaptételt másként így mondhatjuk: *az egész kebel, úgy van az egyik hegyes szöglet' pót-érintőjéhez, mint az ezen szöglettel általellenes mellék-oldal, a' mellette fekvő mellékoldalhoz.*

27. §.

„Harmadik alaptétel.“ Bármelly síkháromszögben, a' szögletek' keblei úgy vannak egymáshoz, mint a' felvett szögletekkel átellenes oldalok.

Id. 5. Legyen △ ABC (id 5.), — bocsássuk le a' BD függönyt. Itt két eset lehet, t. i. vagy belöl esik a' függöny a' △-ben, az AC oldalra, — vagy kivül a' △-en, az AC oldal' folytatására.

Az *első esetben*, az ABD és BDC egyenes-szögű háromszögek (a' 25. §. szerint) illy arányokat adnak:

R : keb. A = AB : BD,

R : keb. C = BC : BD.

Mivel ezen két arányoknak szélső tagjai ugyanazok: tehát illy arány lesz belölök:

keb. A : keb. C = BC : AB.

Ezt kellett megmutatni.

A' második esetben, az ABD és BCD háromszögek ismét illy arányokat adnak:

R : keb. A = AB : BD
R : keb. BCD = BC : BD

's innen:

keb. A : keb. BCD = BC : AB.

Azonban mivel a' BCD szögletnek pótléka az ACB : tehát keb. BCD = keb. ACB, 's ezt amaz helyett tehetni. Ésígy:

keb. A : keb. C = BC : AB.

Ezt kellett megmutatni.

28. §.

„Negyedik alaptétel." Bármelly síkháromszögben, két oldalok' összege, úgy van ugyanazoknak különbségéhez: mint a' felvett oldalokkal általellenes két szögletek' félösszegének érintője, ugyanazon szögletek' félkülönbségének érintőjéhez.

Ugyanis: a' harmadik alaptétel szerint Id 5.

keb. A : keb. C = BC : AB.

Azonban, a' számtani szabályok szerint, bármelly arányban a' két első tagok' összege, úgy van ugyanazok' különbségéhez, mint a' két utolsó tagok' összege, ugyanazok' különbségéhez. E' szerint:

keb A + keb. C : keb. A − keb. C = BC + AB : BC − AB;

úgyde a' 24. §-ban megmutatánk, hogy:
keb. A + keb. C : keb. A — keb. C =
érint. $\frac{1}{2}$ (A + C) : ér. $\frac{1}{2}$ (A — C).
innen:

BC + AB : BC — AB = érint. $\frac{1}{2}$ (A + C) : érint. $\frac{1}{2}$ (A — C).

29. §.

„Ötödik alaptétel." Bármelly síkháromszögben, valamelly szöglet' pótkeble annyi, mint ha ezen szögletet bezáró két oldalok' négylegeinek összegéből, az átellenes oldal' négylege kivonatván, ezen maradék a' sugárral sokszoroztatik, és a' szögletet bezáró két oldalok' sokszorozmányának kettőzetével elosztatik.

Id. 5. Ugyanis: legyen (id. 5.) $\triangle$ ABC, mellyben a' BD függöny az AC oldalra eresztetik. — A' hajlottszögü háromszögekre nézve a' tértanban megmutattuk, hogy:

$$\overline{BA}^2 = \overline{BC}^2 + CA^2 \pm 2\, CA \times CD,$$

a' kettős ($\pm$) jegyek közül a' (+) azon esetre tartozván, midőn a' függöny a' háromszögen kivül esik, — a' (—) pedig arra, midőn belöl esik.

Vegyük a' CD darabvonal' háromszögtani értekét a' CBD egyenes-szögü háromszögben; lesz (25. §. szerint): $CD = \dfrac{CB \times \text{pótk. } C}{R}$. Ezen értéket az előbbi egyenletben helyettesítvén, lesz:

$$\overline{BA}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 \pm \frac{2\, CA \times CB \times \text{pótk } C}{R},$$

és a' *pótk. C* értekét kifejtvén, lesz:

$$\text{pótk. } C = \pm \frac{R\,(AC^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AB}^2)}{2\, AC \times BC}.$$

Ezt kellett megmutatni.

Ezen képlet használtatik azon esetben, midőn kiadatván a' háromszög' mind három oldala, egy szöglet kerestetik. — Az egyenlet második része előtt a' kettős jegyet megtartani nem szükség, — mert a' számitásban nyilván van, hogy a' C szöglet hegyes-e, vagy tompa, — ésígy pótkeble igenleges-e, vagy nemleges?

Ha valamelly síkháromszögben, az A, B, C szögletekkel átellenes oldalokat, megfelelöleg, a, b, c-nek nevezzük; az imént adott alaptételt mind a' három szögletre alkalmazván, következő 3 egyenletet nyerünk:

$$\text{pótk. } A = \frac{R\,(b^2 + c^2 - a^2)}{2bc},$$

$$\text{pótk. } B = \frac{R\,(a^2 + c^2 - b^2)}{2ac},$$

$$\text{pótk. } C = \frac{R\,(a^2 + b^2 - c^2)}{2ab}.$$

Mivel itt a' háromszög' hat részeire: A, B, C, és a, b, c, három egyenlet van: látnivaló, hogy csupán ezen 3 egyenlet is elégséges volna arra, hogy, kiadatván a' háromszög' bármellyik 3 része, a' többi 3-mat kikereshessük.

30 §.

Midön valamelly képletet, a' háromszög' valamelly részének kiszámitása végett felállítunk: igen helyes azt olly alakba venni, hogy reá a' logarithmusokat könnyen alkalmazhassuk, t. i. hogy számítás közben ne kényteleníttessünk logarithmusokról csupa számokra, majd ezekről amazokra visszatérni, — hanem az egész számitás logaríthmusokkal történhessék. E' czélt elérhetjük, a' legközelebb lehozott képleteket illetöleg, ha például egygyel közülök ezt cselekesszük:

$$\text{Legyen: pótk. } A = \frac{R\,(b^2 + c^2 - a^2)}{2bc}$$

vagy ha $R = 1$:

$$\text{pótk. } A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Ezen egyenlet' mindenik részét vonjuk ki 1-ből:

$$1 - \text{pótk. } A = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \text{ vagy}$$

$$1 - \text{pótk. } A = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} \ldots\ldots (x)$$

Úgyde a' 18. §. (13) szerint:

$$\text{pótk. } A = 1 - 2 \text{ keb.}^2 \tfrac{1}{2} A,$$

ha ezen egyenlet' mindkét részét kivonjuk 1-ből:

$$1 - \text{pótk. } A = 1 - 1 + 2 \text{ keb.}^2 \tfrac{1}{2} A,$$

vagy: $1 - \text{pótk. } A = 2\text{keb.}^2 \tfrac{1}{2} A \ldots\ldots\ldots (z)$

Az (x) és (z) egyenletek' első részei ugyanazok levén, az utolsókat tegyük egyenletbe:

$$2\text{keb.}^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc},$$

következőleg:

$$\text{keb.}^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{(a+b-c).(a-b+c)}{4bc}.$$

És most legyen $a + b + c = 2s$; e' szerint lesz $(a + b - c) = 2s - 2c$, — és $(a - b + c) = 2s - 2b$, — 's e' szerint az előbbi képlet így lesz:

$$\text{keb.}^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{(2s - 2c).(2s - 2b)}{4bc};$$

$$\text{vagy: keb.}^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{4s^2 - 4sc - 4bs + 4bc}{4bc};$$

$$\text{vagy: keb.}^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{s^2 - sc - sb + bc}{bc};$$

$$\text{vagy: keb.}^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{(s-c).(s-b)}{bc};$$

$$\text{végre: keb. } \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(s-c)\,.\,(s-b)}{bc}}$$

$$\text{vagy: log. keb. } \tfrac{1}{2}A = \frac{\text{log.}(s-c) + \text{log.}(s-b) - \text{log. } bc}{2}.$$

Ezen képletet mind lehozni, mind megtartani igen könnyü; — 's ha ennek segitségével, (az s jelentvén a' három kiadott oldalok' félösszegét) akármelly keresett szöglet' felét megtaláljuk, annak kettőzete lesz a' keresett szöglet.

NEGYEDIK CZIKKELY.

A' síkháromszögek' kifejtéséről.

A) *Egyenes-szögű síkháromszögek' kifejtése.*

Legyen akármelly kifejtendő egyenes-szögü háromszögben az egyenes-szög = A, a' két hegyesek = B és C: a' feszes-oldal (hypotenusa) = h, — a' B szöglettel átellenes oldal = b, — a' c szöglettel átellenes oldal = c. Ezeket így elnevezvén: az egyenes-szögü háromszögek' kifejtését illető minden esetek, e' következő négy feladatban kimeríthetők.

31. §.

I-ső feladat: Adatván a' feszes-oldal = h, és a' b oldal: megtalálni a' háromszög' többi részeit.

A' B szögletet megtaláljuk így:

$$h : b = R : \text{keb. } B, \textit{ innen: } \text{keb. } B = \frac{R \times b}{h},$$

vagy: log. keb. B = 10 + log. b — log. h.

Ezen egyenleten kijö a' B szöglet' keble, vagy keblének logarithmusa; 's a' függvényi táblákban azt felkeresvén, — mellette találjuk a' B szögletet — Ha a' B szögletet tudjuk: a' c önkényt tudatik, mert $C = 90^0 - B$.

A' c oldalt megtaláljuk így:

$$R : \text{keb. } C = h : c, \text{ innen: } c = \frac{h \times \text{keb. } C}{R};$$

vagy: log. c = log. h + log. keb. C — 10.
Ezen egyenleten kijö a' c oldal, vagy, ha logarithmusokkal dolgozunk, annak logarithmusa, — mellyet a' logarithmusi táblákban fölkeresvén, a' mellette álló szám mutatja a' *c* oldal' hosszát.

A' következö feladatokban a' logarithmusokkali kifejezést tegye fel maga a' tanuló.

32. §.

II-dik feladat: Adatván a' b és c mellékoldalok a' háromszög' többi részeit megtalálni.

Illy arányok 's egyenletek állnak:

$$b : c = R : \text{érint. } C, \textit{ innen: } \text{érint. } C = \frac{R \times c}{b}$$

$$B = 90^0 - C$$

$$R : \text{keb. } C = h : c, \text{ innen: } \ldots\ldots h = \frac{R \times c}{\text{keb. } c}$$

33. §.

III-dik feladat. Adatván a' feszes oldal = h, és a' B szöglet: a' háromszög' többi részeit megtalálni.

Megtaláljuk a' *C*-t, *c*-t és *b*-t, illy módon:

$$C = 90^0 - B,$$

$$R : \text{keb. } C = h : c, \textit{ innen: } c = \frac{\text{keb. } C \times h}{R}$$

$$R : keb.\ B = h : b,\ \textit{innen}:\ b = \frac{keb.\ B \times h}{R.}$$

34. §.

IV-dik feladat. Adatván a' b oldal, és C szöglet: a' háromszög' többi részeit megtalálni.

Itt is hasonlólag:

$$B = 90^0 - C$$

$$R : keb.\ B = h : b,\ \textit{innen}:\ h = \frac{R \times b}{keb.\ B}$$

$$R : keb.\ C = h : c \ldots\ldots c = \frac{h \times keb.\ C}{R}.$$

B) *Hajlottszögű síkháromszögek' kifejtése.*

Legyenek A, B, C, bármelly felvett háromszög' 3 szögletei, — és a, b, c, az azokkal megfelelőleg átellenes oldalok. Ez így levén: a' kifejtés' lehető minden eseteit e' következő négy feladatra vihetni.

35. §

I-ső feladat. Adatván az a oldal, és két szögletek, A és C: megtalálni a' háromszög' többi részeit.

A' B szögletet megtaláljuk, ha a' kiadott két szöglet' összegét 180°-ból kivonjuk, —

$$B = 180 - (A + C)$$

A' *b* és *c* oldalokat így találjuk meg:

$$keb\ A : a = keb.\ B : b,\ \textit{innen}:\ b = \frac{a \times keb.\ B}{keb.\ A}$$

$$keb.\ A : a = keb.\ C : c \ldots\ldots c = \frac{a \times keb.\ C}{keb\ A.}$$

36. §.

II-dik feladat. Adatván az a és b oldalok, és az a oldallal általellenes A szöglet: a' többi részeket megtalálni.

A' B szögletre nézve ezt tegyük:

$$\text{keb. } A : a = \text{keb. } B : b$$

$$\text{innen: keb. } B = \frac{b \times \text{keb } A}{a}$$

A' C szöglet' értéke ez: $C = 180^0 - (A + B)$.

A' c oldalt így találjuk meg:

$$\text{keb. } A : a = \text{keb. } C : c$$

$$\text{innen: } c = \frac{a \times \text{keb. } C}{\text{keb. } A.}$$

37. §.

III-dik feladat. Adatván az A szöglet, 's az ezt képző két oldalok b, és c: a' többi részeket megtalálni.

Itt alkalmazzuk a' 28. §-ban lehozott alaptételt, miszerint: az adott szögletet bezáró két oldalok' öszszege, úgy van ugyanezeknek különbségéhez: mint a' két ismeretlen szögletek' félösszegének érintője, ugyanezen szögletek' félkülönbségének érintőjéhez. Következőleg:

$$b + c : b - c = \text{érint. } \tfrac{1}{2}(B + C) : \text{érint. } \tfrac{1}{2}(B - C).$$

Innen a' 4-dik tag' értéke lesz:

$$\text{érint. } \tfrac{1}{2}(B - C) = \frac{(b - c) \times \text{érint. } \tfrac{1}{2}(B + C)}{b + c}$$

Vegyük tehát előbb a' két ismeretlen szöglet' félösszegét, melly $= \frac{180 - A}{2}$; továbbá ugyanazoknak félkülönbségét, az épen most adott egyenleten megtaláljuk. Ekkor, ha félösszeghez félkülönbség adatik, kijő a' nagyobbik,- és ha félösszegből félkülönbség kivonatik, kijő a' kisebbik ismeretlen szöglet. (lásd számt. 82. §.) Ésígy:

$$B = \tfrac{1}{2}(B+C) + \tfrac{1}{2}(B-C)$$
$$C = \tfrac{1}{2}(B+C) - \tfrac{1}{2}(B-C.)$$

Még csak az *a* oldalt kell megtalálni, — 's azt így lehet:

$$\text{keb. } B : b = \text{keb. } A : a$$

$$\text{innen: } a = \frac{b \times \text{keb. } A}{\text{keb. } B}$$

38. §.

IV-dik feladat. Adatván három oldal, a, b, c: a' szögleteket megtalálni.

Azokat megtaláljuk a' 30-dik §-ban adatott képletek szerint, így:

$$\text{keb. } \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(s-b)\,(s-c)}{bc}};$$

$$\text{keb. } \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(s-a)\,(s-c)}{ac}};$$

$$\text{keb. } \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(s-a)\,(s-b)}{ab}};$$

megtalálván a' félszögleteket, azokat kétszer vesszük.

ÖTÖDIK CZIKKELY.

A' háromszögtannak néhány gyakorlati esetekre alkalmazása.

39. §.

Id. 6. I. feladat: *Adatván a' párlag' két oldala, AB talp = b, és AD = c, 's az ezek közt eső A szöglet (id. 6.): a' párlag' udvarát megtalálni.*

Elnevezvén a' párlag' magosságát h-nak: az udvar' (S) rendes tértani kifejezete ez:

$$S = b \,.\, h.$$

Úgyde az ADE háromszögben illy arány áll:

$$R : \text{keb. } A = c : h$$

innen: $h = \dfrac{c \times \text{keb. } A}{R}.$

Már az udvar' kifejezetében, a' *h*-nak ezen értekét helyettesitvén; lesz az udvar' háromszögtani kifejezete:

$$S = \frac{bc \times \text{keb. } A}{R},$$

vagy ha $R = 1$:

$$S = b.\ c.\ \text{keb } A.$$

vagy: $\log. S = \log. b + \log. c + \log. \text{keb. } A. - 10.$

Példa

Legyen: $b = 30{,}26^0$; $c = 25{,}47^0$; $< A = 39^0 19'$

$$\begin{aligned}\log.\ b &= 1{,}4808689.\\ \log.\ c &= 1{,}4060289.\\ \log.\ \text{keb.}\ A &= 9{,}8018192\\ \hline &\ \ 12{,}6887170-10\\ \log.\ S &= 2{,}6887170.\\ S &= 488{,}33\square''.\end{aligned}$$

40. §.

II. feladat. *Adatván a' háromszög' 3 oldala: udvarát kiszámítni.*

Legyen ABC háromszög (id. 5.); nevezzük el a, b, c-nek az A, B, C-szögletekkel megfelelőleg átellenes oldalokat, — a' BD magosságot pedig x-nek. — A' háromszög' udvarának tértani kifejezete lesz: Id. 5.

$$S = \frac{b}{2} \cdot x$$

Már az x' értekét, a' 3 kiadott oldaloktól függőleg kell kifejezni. — E' végre: az ABD egyenes-szögü háromszögben illy egyenlet áll:

$$x = \sqrt{c^2 - \overline{AD}^2};$$

Úgyde a' felvett ABC háromszögben, — mint a' tértanban tanultuk, ez áll:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \times AD$$

$$\text{innen: } AD = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2b}$$

$$\text{és: } \overline{AD}^2 = \frac{(c^2 + b^2 - a^2)^2}{4b^2}$$

$$\text{következőleg: } x = \sqrt{c^2 - \frac{(c^2 + b^2 - a^2)^2}{4b^2}}$$

$$\text{vagy: } x = \sqrt{\frac{4b^2c^2 - (c^2 + b^2 - a^2)^2}{4b^2}};$$

$$\text{vagy: } x = \frac{\sqrt{4b^2c^2 - (c^2 + b^2 - a^2)^2}}{2b}.$$

Az x' ezen értekét a' háromszög' udvarának fentebbi kifejezetében, $S = \frac{b}{2} \times x$, helyettesítvén, lesz:

$$S = \frac{b}{2} \cdot \frac{\sqrt{4b^2c^2 - (c^2 + b^2 - a^2)^2}}{2b};$$

$$\text{vagy: } S = \frac{b}{4b} \cdot \sqrt{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2};$$

$$\text{vagy: } S = \tfrac{1}{4} \sqrt{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)};$$

$$S = \tfrac{1}{4} \sqrt{(2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2)};$$

$$S = \tfrac{1}{4} \sqrt{[(b+c)^2 - a^2][a^2 - (b-c)^2]};$$

$$S = \tfrac{1}{4} \sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a+c-b)}.$$

Már ha a' 3 oldalok' összegét, — mint rendesen szokták, — elnevezzük 2s-nek, t. i. $a + b + c = 2s$: lesz az utolsó képlet:

$$S = \tfrac{1}{4} \sqrt{2s(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c)};$$

$$\text{vagy: } S = \sqrt{\tfrac{1}{2} \cdot 2s(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c)};$$

$$\text{végre: } S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Ezen képletből láthatni, hogy ha a' háromszög' mindhárom oldala kiadatik, annak *udvara kijő, ha 3 oldalainak félösszegéből sorba minden oldal kivonatik, és ezen különbségek egymással, és a' három oldal' félösszegével sokszoroztatnak, végre ezen sokszorozmányból négyleg-gyökér fejtetik.*

Ezen képlet nagy hasznú a' gyakorlati tértanban, főként mikor a' △' udvarába menni nem lehet. — Alkalmazható ez a' sokszögek' udvarmérésére is, — 's használatára mérő láncznál egyéb nem kivántatik.

Példa.

Tudjuk, hogy az egyenesszögű háromszögben, ha a' feszes-oldal $= 5^0$, és egyik mellékoldal $= 4^0$, úgy a' másik mellékoldal $= 3^0$. És ennek udvara: $S = 4 \times \frac{3}{2} = 6\square^0$

Lássuk az adott képlet szerint. $\frac{5 + 4 + 3}{2}$ $= 6$; ésígy az udvar:

$$S = \sqrt{6\,(6-5)\,(6-4)\,(6-3)}$$
$$= \sqrt{6 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3} = \sqrt{36}$$
$$= 6\square^0.$$

41. §.

III-dik feladat. *Adatván a' háromszög' két oldala, 's a' köztök eső szöglet: az udvart kiszámítni.*

Legyenek az adott oldalok b és c (id. 5), az adott szöglet A: az ABD egyenesszögű háromszögben illy arány áll: Id.

$$R : \text{keb. } A = c : x,$$

a' honnan, az $R = 1$ levén:

$$x = c \,.\, \text{keb. } A.$$

Már az ABC háromszög' udvarának térlani kifejezete ez:

$$S = \frac{b}{2} \cdot x,$$

az x' előbbi értékét itt helyettesítvén, lesz:

$$S = \frac{bc}{2} \cdot \text{keb. } A.$$

azaz: *a' háromszög' udvara kijő, ha két oldal' sokszorozmányának fele, a' köztök eső szöglet' keblével sokszoroztatik.*

Példa.

Az előbbi §-bani példát felvévén: egyik adott oldal $= 4$, másik $= 3$, — köztök esik az egyenesszög, mellynek keble $= 1$; ésígy

$$S = \frac{3 \,.\, 4}{2} \times 1 = 6\square.^{0}$$

42. §.

IV-dik feladat. *Adatván a' háromszög' egy oldala, és két mellette eső szöglet: az udvart kiszámítni.*

Id. 5. Adatik a' c oldal (id. 5), az A és B szögletekkel: a' felvett ABC háromszögben:

$$\text{keb. } B : \text{keb. } C = b : c$$

vagy, mivel keb. $C =$ keb. $(A + B)$, (mert $A + B$ egészitője 180^{0}-ra a' C-nek): tehát:

$$\text{keb. } B : \text{keb. } (A + B) = b : c,$$

innen: ... $b = \dfrac{c \,.\, \text{keb. } B}{\text{keb. } (A + B)}$;

már mivel az ABC háromszög' udvarának, azon esetre, ha a' b oldal is kiadatik, az előbbi §-ban illy képletét adánk:

$$S = \frac{bc}{2} \cdot \text{keb. } A;$$

ezen képletben a' b helyett a' most kifejtett értekét helyettesitvén: lesz

$$S = \frac{c.\, \text{keb. } B}{\text{keb. } (A + B)} \times \frac{c}{2} \times \text{keb. } A.$$

$$\text{vagy: } S = \frac{c^2}{2} \times \frac{\text{keb. A. keb. B}}{\text{keb (A+B)}}.$$

$$\text{vagy: log. S} = \text{2log. c} - \text{log. 2} + \text{log. keb. A} + \text{log. keb. B} - \text{log. keb. (A + B)}$$

43. §.

V. feladat, *Két hozzájárulhatlan pontoknak, D és C, távolságát megtalálni.* (id. 7) Id. 7.

Kimérvén, a' hol lehet, egy vonalat AB, 's nézvén dioptrával mind az A, mind a' B pontokból, mind a' D, mind a' C pontok felé: szögmérövel pontosan megméretnek a' DAC, CAB, ABD, DBC szögletek, — midőn egyszersmind a' DAB, és CBA szögletek is tudva lesznek. — Ekkor a' DAB háromszögben, ismervén a' DAB és DBA szögleteket, a' 3-dik ADB szögletet is ismerjük, mint egészitőt 180°-ra. Ésígy kikereshetjük a' DA oldalt illy arányon:

$$\text{keb. ADB : keb. DBA} = \text{AB : AD.}$$

Továbbá a' CAB háromszögben, ismervén a' CAB és CBA szögleteket, az ACB-t is ismerjük. Ésígy kikereshetjük az AC oldalt illy arányon:

$$\text{keb. ACB : keb. ABC} = \text{AB : AC.}$$

Már a' DAC háromszögben, ismerünk két oldalt, DA és AC, és a' közben eső DAC szögletet: a' másik két szögletet megtaláljuk úgy, ha azoknak félkülönbségét kikeressük, — így:

$$\text{AC} + \text{AD : AC} - \text{AD} = \text{érint}\left(\frac{\text{ADC}+\text{ACD}}{2}\right) : \text{ér.}\left(\frac{\text{ADC}-\text{ACD}}{2}\right)$$

Így az ismeretlen szögletek' félkülönbségét megtalálván, hozzáadjuk azt a' félösszeghez, 's megtaláltuk a' nagyobbik ismeretlen szögletet ADC, — vagy kivonjuk azt a' félösszegből, 's megtaláltuk a' kisebbiket ACD.

Végre a' keresett DC vonal' megtalálása végett illy arányt csinálunk:

$$\text{keb. } DCA : \text{keb. } DAC = AD : DC.$$

's így a' feladat meg van fejtve.

44. §.

VI. feladat. *Hozzájárulható magosságot megmérni.*
id. 8. (id. 8).

Az AB megmérendö magosság körül, tegyük fel, hogy a' föld szinte vízirányos fekvésü. Tetszés szerinti távolságon valahol tegyük le a' szögmérőt, az E-nél. Innen egy *látvonalat* irányozunk a' torony' tengelye felé, a' földdel egyközüleg, — másikat pedig a' torony' teteje felé. Erre nézve a' szögmérő' félkörét függöleges állásba tesszük, mit a' lapja mellett függő ólom mutat meg; — továbbá a' feszes dioptrát tesszük vízirányos állásba, úgy hogy a' függö ólom azzal 90^0-nyi szögletet képezzen; a' mozgó dioptrával pedig nézvén az A pont felé, megszámláljuk a' *ca* körív' fokait, 's így a' CDA szögletet ismerjük. Ekkor lánczczal megméretjük az EB = DC távolságot. Miután e' szerint az ADC egyenes-szögü △ben, ismerjük, az egyenes szögön kivül, az ADC szögletet, és DC oldalt: kiszámíthatjuk az AC oldalt, illy arányon:

$$R : \text{érint. } ADC = CD : AC;$$

de még ehhez az asztal' magosságát DE = CB, hozzá kell adni.

45. §.

VII. feladat. *Hozzájarulhatlan magosságot meg-*
id. 9. *mérni.* (id. 9.)

Felvevén a' torony felé irányzott egyenes vonalon két álláspontot, A és B; az AB távolságot, — az ICS, és IDS szögleteket megmérjük. Továbbá az ICS szöglet' egészitőjét, az SCD szögletet már e' szerint ismervén: az SCD háromszögben ismerünk egy oldalt CD = AB, és a' két mellette eső szögletet; 's ez által a' harmadikat is; ezekből kiszámíthatjuk az SC oldalt, illy arányon:

keb. CSD : keb. SDC = CD : SC.

Végre az SIC egyenes-szögü háromszögben, ismervén minden szögletet, és az SC feszesoldalt: kiszámíthatjuk az SI oldalt, vagy a' torony' magosságát odáig, a' hova a' szögmérő' alsó dioptrájával irányozható vonal ér, — illy arányon:

R: keb. SCI = SC : SI,

mellyhez még az asztal' magosságát kell adni.

46. §.

VIII. feladat. *Valamelly hegy' magosságát megmérni.* (id. 10.) Id. 10.

Felvevén egy alapvonalat CD, ennek hoszszát megmérjük; — továbbá ezen alapvonal' végeinél az SCD, és SDC szögleteket megmérjük. Így az SDC háromszögben ismerünk egy oldalt, és két mellette eső szögletet, — mi által a' 3-dik szöglet CSD is tudva van. Ezekből kiszámíthatjuk az SC oldalt így:

keb. CSD : keb. SDC = CD : SC.

Továbbá megnézzük, hány foknyi az SCZ szöglet, mellyet az SC látvonal a' ZC függőleges vonallal képez, 's vesszük ennek pótlékát 90 fokra, melly is az SCA szöglet, mellyet a' hegy' tengelyének A' pontjához, a' szögmérő' vízirányos dioptrájával nézhető CA vonal képez a' CS vonallal. — Ekkor az SAC egyenes-szögü háromszögben ismervén, az A egyenes-szögen kivül, a' feszes oldalt SC, és egy hegyes szögletet ACS, kiszámithatjuk az AS oldalt, így:

R: keb. SCA = SC : SA,

vagy: R : pótk. SCZ = SC : SA,

— mellyhez ha a' mérőasztal' magossága hozzáadatik, megvan találva a' hegy' magossága.

47. §.

IX. feladat. *Valamelly tájék' képét háromszögta-*
Id. 11. *nilag felvenni.*

Ezen munkálat' czélja az, hogy papíron valamelly tájékhoz hasonló, vagyis ollyan idomot, — képrajzot készitsünk, mellynek minden része, a' tájék' minden megfelelő részéhez bizonyos adott viszonyban legyen.

Erre nézve a' tájékon bizonyos szembetünő tárgyak, mint határpontok felvétetnek, p. o. torony, ház, fa 'sat., vagy ha elég természeti tárgy nem volna, a' határpontoknál lobogók állittatnak fel, — mellyeknek segitségével a' *tájék' háromszögelése* (triangulatio) történhessék. Azonban feltesszük, hogy mindazon határpontok ugyanazon vízmentes síklapon feküsznek.

Legyenek A, D, E, C, G, F illyen szembetünő határpontok; ha ezeket egymás közt egyenes vonalokkal összeköttetve gondoljuk: háromszögek' hálózata származik, mellyeknek tetőpontjai a' határjegyek. Ezen háromszögeket kell tehát bizonyos mértékkel fölvenni, hogy papíron, kismértékben, ezekhez hasonlókat készíthessünk.

Erre nézve felveszünk valahol a' tájék' terjedetében egy *alapvonalat*, 's ezt két határjegy' irányában olly helyen választjuk, hogy mind könnyen, akármikor fel lehessen találni, — mind annak két végéről, 's különböző pontjairól, a' tájék' minél több pontjait be lehessen látni; — és ezen vonalat a' legnagyobb pontossággal megmérjük.

Legyen *alapvonal* (basis) AC, melly a' tájékot keresztül vágja. Vegyük fel ezen valahol a' B pontot, 's mérjük meg az AB és BC távolságokat. Ekkor az A, B, és C álláspontokból távcsővel ellátott jó szögmérővel, pontosan megmérjük mind azon szögleteket, mellyeket az ezen álláspontokból minden határpontok felé nézhető vonalak egymással, vagy az alapvonallal képeznek, — és a' megmért szögletek' mennyiségét pontoson feljegyezzük. Nagyobb bizonyosság' kedviért, ha lehet, még egy vagy több oldalokat is p. o. EC 'sat. megmérünk. Mindezen méréseket egy táblácskába pontoson feljegyezvén: készen vannak minden adataink arra nézve, hogy minden itteni háromszögek' minden részeit egymás után kiszámíthassuk. P. o.

Az ABB háromszögben, miután megmértük az AB oldalt, és DAB, DBA mellette eső két szögleteket: a' fentebb előadott háromszögtani szabályok szerint, annak többi részeit kiszámithatjuk. — Így a' BCE háromszögben is adatván a' CB oldal, 's két mellette eső szöglet: a' többi részeket kiszámíthatjuk. Ekkor már ki levén számítva a' DBE háromszögben két oldal, DB és EB, — 's meg levén mérve a' köztök eső szöglet: ennek többi részeit is ki lehet számítni. Így a' többi háromszögekre nézve is.

Látnivaló, hogy illy móddal kiszámitván a' tájékon levő minden △-gek oldalait, — 's már ismervén szögleteit: papíron kismértékkel azokhoz hasonló háromszögeket, — 's így az egész tájék' kis képrajzát készithetünk; — nemcsak, de ezen △-gek', 's így az egész tájék' udvarterületét is, háromszögtanilag kiszámíthatjuk.

A' tajékon eső több tárgyak' egymás iránti helyzetének felvételéről — így a' földszin' különböző hajlásainak kiszámitásáról 'sat., — mellyekről a' gyakorlati tértan tanít, — itt nem beszélhetünk, — mivel tanulásunk csak az elemekre, bevezetésre szorítkozik.

MÁSODIK SZAKASZ.

Gömbháromszögtan.

(Trigonometria sphaerica.)

---

48. §.

A' tértanban a' gömbháromszögek' tulajdonait megtanultuk. Tudjuk, hogy ezek is vagy egyenesszögűek, vagy hajlott-szögűek; — még pedig az egyenes szögűekben vagy egy, vagy két, vagy három egyenes szöglet van. Ha 3 egyenes szög van benne: úgy minden külön oldala 90 foknyi körív; — ha két egyenes szög van: úgy két oldal 90^0-nyi, — a' 3-dik az átellenes szöglettel egyenlő foknyi körív. Ezen két fajta gömbháromszögek' kifejtésében, mint láthatni, nincs semmi nehézség. — Csak az egy egyenes szögű, és a' hajlottszögű gömbháromszögek lesznek tehát vizsgálatunk' tárgyai.

A' gömbháromszögtan a' síkháromszögtanon alapul; 's itt nemcsak a' szögletek-, hanem az oldalok helyett is — mivel azok körívek — függvényeket használunk.

ELSŐ CZIKKELY.

Az egyenes-szögű gömbháromszögek' kifejtését illető alaptételek.

49. §.

„I-ső alaptétel.“ Minden egyenes-szögű gömbháromszögben úgy van az egész kebel = R, egy hajlott szöglet' kebléhez, mint a' feszes-oldal' keble, — a' felvett szöglettel átellenes oldal' kebléhez.

Id. 12 Legyen ABC (id. 12.) a' felvett egyenesszögü gömbháromszög, — ebben B az egyenesszög, — A és C, hajlottak. A' gömb' O középpontjából húzzuk az OA, OB, OC sugárakat, mellyek által három síklapok AOB, AOC, BOC képeztetnek; mellyek egymásra hajolván, 3 lapszögletet képeznek, — és azok között az, mellyet AOB és BOC síklapok képeznek, egyenes lapszöglet, a' másik kettő hajlott. — Azonban tudjuk, hogy a' kihúzott 3 sugár által képzett vonal-szögletek' mértékei, a' felvett gömbháromszög' megfelelő körívei, — t. i. AOC szöglet' mértéke az AC, — BOC szögleté a' BC, — AOB szögleté az AB, — ésígy ezen vonalszögletek' függvényei az őket mérő köríveknek is függvényei.

Most vegyünk fel az OC sugáron egy darabot OD, 's tegyük meg azt a' táblákbani R-nek; ha a' D pontról függönyt eresztünk az OB sugárra = DE: ez lesz = keb. COB, = keb. BC. Ha ismét a' D pontról függönyt eresztünk az AO sugárra = DF: ez lesz = keb. DOF = keb. AC. Továbbá, ha az F és E pontokat összekötjük az FE függönynyel: az ott képzett FED vonalszöglet egyenlő azon lapszöglettel, mellyet az OAB és OBC síklapok képeznek, mivel az FE és DE vonalak ezen síklapokon függönyök; és mivel ezen lapszöglet egyenes: tehát $\angle$ FED is egyenes; hasonlóul az EDF egyenesszögü háromszögben a' DFE szöglet' egyenlö a' CAB szöglettel' vagy a' gömbháromszög' A szögletével. Továbbá DFO háromszögben, melly az F-nél egyenesszögü, ha DF = keb. DOF: úgy OF = pótk. DOF = pótk. AC.

Ezek így levén: a' síkháromszögtani szabályok szerint; az EDF egyenszögü síkháromszögben:

$$R : \text{keb. } DFE = DF : DE$$

$$\text{vagy: } R : \text{keb. } A = \text{keb. } AC : \text{keb. } BC.$$

Ezt kellett megmutatni.

Épen így mondhatjuk:

$$R : \text{keb. } C = \text{keb. } AC : \text{keb. } AB.$$

Ha az A, B, C, szögletekkel átellenes oldalokat, illetöleg, a, b, c-nek nevezzük: így lesznek az arányok:

$$R : \text{keb. } A = \text{keb. } b : \text{keb. } a,$$

$$R : \text{keb. } C = \text{keb. } b : \text{keb. } c.$$

ezen arányokból illy egyenletek lesznek:

$$\left.\begin{array}{l} R.\ \text{keb. } a = \text{keb. } b.\ \text{keb. } A \\ R.\ \text{keb. } c = \text{keb. } b.\ \text{keb. } C \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \ (1)$$

Ezen egyenletekben elöjönek, a' feszes-oldal, egy hajlott szöglet, és az azzal átellenes mellékoldal; melylyek közül akármellyik legyen keresendö, ha a' másik kettö kiadatik, — az egyenletböl ki lehet keresni.

50. §.

„*II-dik alaptétel.*" *Minden egyenes-szögü gömbháromszögben: úgy van R, egyik hajlott szöglet' pót-*

kebléhez: mint a' feszes-oldal' érintője, a' felvett hajlott szöglet mellett eső mellék-oldal' érintőjéhez.

Id. 12. Az előbbi szerkezetre figyelmezvén (id. 12.) a' DEF egyenes-szögű síkháromszögben, — a' síkháromszögtani szabályok szerint, illy arány áll:

$$\text{R} : \text{pótk. DFE} = \text{DF} : \text{FE}$$

$$\text{vagy: R} : \text{pótk. A} = \text{keb. AC} : \text{FE} \quad \ldots (x)$$

Úgyde az OFE háromszögben, melly egyenes-szögű az F-nél, a' síkháromszögtani szabályok szerint:

$$\text{R} : \text{érint. EOF} = \text{OF} : \text{FE};$$

$$\text{vagy: R} : \text{érint. AB} = \text{pótk. AC} : \text{FE}.$$

Ezen utolsó arányból meghatározván az FE értékét:

$$\text{FE} = \frac{\text{pótk. AC . ér. AB}}{\text{R}},$$

's ezt az (x) arányban helyettesítvén, lesz:

$$\text{R}: \text{pótk. A} = \text{keb. AC} : \frac{\text{pótk. AC . ér. AB}}{\text{R}}.$$

vagy osztási alakban:

$$\frac{\text{R}}{\text{pótk. A}} = \frac{\text{R. keb. AC}}{\text{pótk. AC}} : \text{ér. AB} = \frac{\text{érint. AC}}{\text{érint. AB}};$$

innen végre:

$$\text{R} : \text{pótk. A} = \text{ér. AC} : \text{ér. AB}.$$

Így a' C hajlott-szögletre nézve is:

$$\text{R} : \text{pótk. C} = \text{ér. AC} : \text{ér. BC}.$$

Ezt kellett megmutatni.

Már ha, mint előbb, AC = b, BC = a, AB = c lesz:

$$\text{R} : \text{pótk.A} = \text{ér.b} : \text{ér.c},$$

$$\text{R} : \text{pótk.C} = \text{ér.b} : \text{ér.a},$$

's innen:

$$\left.\begin{array}{l} R \times \text{ér. } c = \text{ér. } b \times \text{pótk. } A \\ R \times \text{ér. } a = \text{ér. } b \times \text{pótk. } C \end{array}\right\} \ldots (2).$$

Ezen egyenletben elöjönek: a' feszesoldal, egyik hajlottszöglet, és az a' mellett esö mellék-oldal,— mellyek közül akármellyik kettö kiadatván, a' 3-dikat ki lehet keresni. p. o.

$$\text{pótk. } A = \frac{R \times \text{ér. } c}{\text{ér. b.}} = \frac{R}{\text{ér. b.}} \times \text{ér. } c$$

$$\text{pótk. } C = \frac{R \times \text{ér. } a}{\text{ér. b.}} = \frac{R}{\text{ér. b}} \times \text{ér. } a$$

vagy mivel $\frac{R}{\text{ér. b.}} = \text{pótér. } b$: lesz:

$$\text{pótk. } A = \frac{\text{ér. } c \times \text{pótér. } b}{R},$$

$$\text{pótk. } C = \frac{\text{ér. } a \times \text{pótér. } b}{R}.$$

51. §.

„III-dik alaptétel.“ Minden egyenes-szögű gömbháromszögben: úgy van R, egyik mellékoldal' pótkebléhez: mint a' másik mellékoldal' pótkeble, a' feszesoldal' pótkebléhez.

Megtartván ugyanazon gömbháromszöget ABC, (id. 12.), 's ugyanazon szerkezetet, mint eddig: az OEF síkháromszögben, melly az F-nél egyenes-szögű, — a' síkháromszögtani szabályok szerint, illy arány áll: Id. 12.

R : pótk. EOF = OE : OF.

Úgyde: pótk. EOF = pótk. AB; továbbá az ODE egyenesszögü síkháromszögben, OE = pótk. BC, — és az ODF háromszögben, OF = pótk. AC. — Már illyetén helyettesítésekkel, az előbbi arány így lesz:

$$\text{R} : \text{pótk. AB} = \text{pótk. BC} : \text{pótk. AC}.$$

$$\text{vagy: R} : \text{pótk. c} = \text{pótk. a} : \text{pótk. b}.$$

Ezt kellett megmutatni.

Ezen arányból illy egyenlet lesz:

$$\text{R} \times \text{pótk. b} = \text{pótk. a} \times \text{pótk. c.} \quad . \; . \; . \; (3).$$

Ezen egyenletben előjönek a' gömbháromszög' három oldalai, mellyek közül ha kettő kiadatik, a' 3-dikat meg lehet találni.

Az eddig előadott 3 alaptételekből, az egyenesszögű gömbháromszögeket illetőleg, még hármat lehet lehozni.

52. §.

„*IV-dik alaptétel.*“ *Minden egyenes-szögű gömbháromszögben: úgy van R, egyik mellék-oldal' pótkebléhez, mint az ezen oldal mellett eső hajlott szöglet' keble, a' másik hajlott szöglet' pótkebléhez.*

Az első és második alaptételekből:

$$\text{keb. A} = \frac{\text{R}\times\text{keb. a}}{\text{keb. b}}, \text{ és: pótk. C} = \frac{\text{R}\times\text{ér. a}}{\text{érint. b}}.$$

Elosztván a' második egyenletet az elsővel:

$$\frac{\text{pótk. C}}{\text{keb. A}} = \frac{\text{érint. a}}{\text{érint. b}} : \frac{\text{keb. a}}{\text{keb. b}};$$

számlálót számlálóval, nevezőt nevezővel elosztván:

$$\frac{\text{pótk. C}}{\text{keb. A}} = \frac{\text{érint. a}}{\text{keb. a}} : \frac{\text{érint. b}}{\text{keb. b}}$$

$$= \frac{\text{R}}{\text{pótk. a}} : \frac{\text{R}}{\text{pótk. b}},$$

$$= \frac{R}{\text{pótk. a}} \times \frac{\text{pótk. b}}{R}$$

végre: $\frac{\text{pótk. C}}{\text{kebl. A}} = \frac{\text{pótk. b}}{\text{pótk. a.}}$

Úgyde: $\frac{\text{pótk. b}}{\text{pótk. a}}$ a' harmadik alaptétel szerint $=$
$\frac{\text{pótk. c}}{R}$ Ésígy: $\frac{\text{pótk. C}}{\text{keb. A}} = \frac{\text{pót. c}}{R}$,
innen: R : pótk. c = keb. A : pótk. C. — *Ezt kellett megmutatni.*

Hasonló mütétellel, mellyet elég legyen megemlítni, — a' másik hajlott szögletre nézve, kijö ezen arány:

R : pótk. a = keb. C : pótk. A.

Már ezen arányokból illy egyenleteket nyerünk:

$$\left.\begin{array}{l} R \,.\, \text{pótk. C} = \text{pótk. c} \,.\, \text{keb. A.} \\ R \,.\, \text{pótk. A} = \text{pótk. a} \,.\, \text{keb. C.} \end{array}\right\} \dots . (4)$$

53. §.

„*V-dik alaptétel.*“ *Minden egyenes-szögű gömbháromszögben: úgy van R egy hajlott szöglet' érintőjéhez, mint a' felvett hajlott szöglet mellett eső mellékoldal' keble, — a' szöglettel átellenes mellékoldal' érintőjéhez.*

Az első és második alaptételekből:

$$\text{keb. A} = \frac{\text{R.keb.a}}{\text{keb.b}}, \text{ és pótk.A} = \frac{\text{R. ér. c}}{\text{ér. b}}.$$

Elosztván az első egyenletet a' másodikkal:

$$\frac{\text{keb.}A}{\text{pótk.}A} = \frac{\text{keb.}a}{\text{keb.}b} : \frac{\text{ér.}c}{\text{ér.}b}$$

az utolsó részben számlálót számlálóval, nevezőt nevezővel osztván, lesz:

$$\frac{\text{keb.}A}{\text{pótk.}A} = \frac{\text{keb.}a}{\text{ér.}c} : \text{pótk.}b = \frac{\text{R. keb.}a}{\text{ér.}c\,.\,\text{pótk.}b.}$$

Úgyde: $\frac{\text{keb.}A}{\text{pótk.}A} = \frac{\text{érint.}A}{R}$; azonban, a' III-dik alaptétel szerint: $\text{pótk.}b = \frac{\text{pótk.}a\,.\,\text{pótk.}c}{R.}$

E' szerint ezen egyenlet:

$\frac{\text{keb.}A}{\text{pótk.}A} = \frac{\text{R. keb }a}{\text{ér. }c.\,\text{pótk.}b}$, máskint így lesz:

$$\frac{\text{érint.}A}{R} = \frac{\text{R. keb.}a}{\text{ér. }c} : \frac{\text{pótk. }a\,.\,\text{pótk. }c}{R}$$

vagy: $\frac{\text{érint.}A}{R} = \frac{\text{R. keb.}a}{\text{ér.}c} \times \frac{R}{\text{pótk.}a\,.\,\text{pótk.}c}$

$$\frac{\text{ér.}A}{R} = \frac{R^2.\,\text{keb.}a}{\text{pótk.}a\,.\,\text{ér.}c\,.\,\text{pótk.}c}$$

innen: $\text{érint. }A = \frac{R\,.\,\text{ér.}a}{\text{keb.}c}$

innen: $\frac{\text{érint.}A}{R} = \frac{\text{ér.}a}{\text{keb.}c}$

innen arány-alakban:

$$R : \text{érint.}A = \text{keb.}c : \text{érint.}a$$

Ezt kellett megmutatni.

Hasonlóul áll ezen arány is:

$$R : \text{érint.}C = \text{keb.}a : \text{érint.}c.$$

Ezen arányokból illy egyenleteket nyerünk:

$$\left.\begin{array}{l} R\,.\,\text{ér.a} = \text{keb.c}\,.\,\text{ér.A} \\ R\,.\,\text{ér.c} = \text{keb.a}\,.\,\text{ér.C} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ (5)$$

54. §.

„VI-dik alaptétel.“ Minden egyenes-szögű gömbháromszögben: úgy van R, a' feszesoldal' pótkebléhez: mint egyik hajlott szöglet' érintője, a' másik hajlott szöglet' pótérintőjéhez.

Ugyanis a' legközelebbi (53. §.) két egyenletekből:

$$\text{ér. A} = \frac{\text{ér. a}}{\text{keb. c}}$$

$$\text{ér. C} = \frac{\text{ér. c}}{\text{keb. a}},$$

ezen két egyenletet egymással sokszorozván, lesz:

$$\text{ér.A} \times \text{ér. C} = \frac{\text{ér. a}}{\text{keb.c}} \times \frac{\text{ér. c}}{\text{keb. a}}$$

$$= \frac{\text{ér. a}}{\text{keb. c}} : \frac{\text{keb. a}}{\text{ér. c}} = \frac{R}{\text{pótk. a}} : \text{pótk. c.}$$

$$\text{ér. A} \times \text{ér. C} = \frac{R}{\text{pótk. a} \times \text{pótk. c.}}$$

Úgyde (a' III-dik alaptételből):

$$\text{pótk. a} \times \text{pótk. c} = R\,.\,\text{pótk. b.}$$

$$\text{és: érint. A} = \frac{R}{\text{pótér. A}}.$$

Ezeket helyettesítvén, lesz:

$$\frac{R}{\text{pótér. A}} \times \text{ér. C} = \frac{R}{R\,.\,\text{pótk. b}}$$

$$\text{vagy:}\quad \frac{R^2 \,.\, \text{ér}\, C}{\text{pótér}.\, A} = \frac{R}{R \,.\, \text{pótk}.\, b}$$

$$\text{vagy:}\quad \frac{\text{ér}.\, C}{\text{pótér}.\, A} = \frac{R}{\text{pótk}.\, b};$$

innen: $R : \text{pótk}.\, b. = \text{ér}.\, C : \text{pótér}.\, A.$

Ezt kellett megmutatni.

Ezen arányból egy egyenlet lesz:

$$R \times \text{pótér}\, A = \text{pótk}.\, b \times \text{ér}.\, C \;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (6)$$

Ezen hat alaptételekből lehozott 10 egyenletek' segitségével, az egyenesszögü gömbháromszögek körül, ha két akármelly rész (az egyenes szögleten kivül, melly mindenkor kiadatva van) kiadatik: akármelly harmadik keresendö részt meg lehet találni.

MÁSODIK CZIKKELY.

Bármi-nemü gömbháromszögek' kifejtését illető alaptételek.

55. §.

„I-ső alaptétel.“ Akárminő gömbháromszögben, a' szögletek' keblei úgy vannak egymáshoz, mint az átellenes oldalok' keblei.

Id. 13. Legyen bárminö gömbháromszög ABC (id. 13.) Eresszünk le egy szögletéből, péld. az A-ból, függőleges körivet az átellenes BC oldalra, vagy annak folytatására: mindenik esetben a' felvett háromszögből két egyenes-szögü háromszöget nyerünk, ABD, ADC. Így a' hajlottszögü gömbháromszögekre, az egyenes-szögüek' szabályait alkalmazhatjuk, — 's azokból ezeket illető alaptételeket hozhatunk le.

Így az ABD és ADC gömbháromszögek, mellyek egyenes-szögüek a' D-nél, illy arányokat adnak (49. §.):

$$R : keb.\ B = keb.\ AB : keb.\ AD$$

$$R : keb.\ C = keb.\ AC : keb.\ AD.$$

És mivel mind a' két arányban a' szélső tagok ugyanazok: tehát a' belsők viszásan arányosok, 's lesz:

$$keb.\ B : keb.\ C = keb.\ AC : keb.\ AB.$$

Ha a' függöleges körív a' háromszögen kivül esik: az arányban levő C szöglet jelenti az ACD szögletet; úgyde annak egészitője az ACB, ésígy: keb. ACD = keb. ACB; 's így a' feltett szabály minden esetben áll.

Ha az A, B, C szögletekkel átellenes oldalokat, megfelelőleg a, b, c-nek, nevezzük: így lesz az arány:

$$keb.\ A : keb.\ B : keb.\ C = keb.\ a : keb.\ b : keb.\ c$$

vagy: $keb.\ A : keb.\ a = keb.\ B : keb.\ b = keb.\ C : keb.\ c$;
's innen illy egyenletek állnak:

$$\frac{keb.\ A}{keb.\ a} = \frac{keb.\ B}{keb.\ b} = \frac{keb.\ C}{keb.\ c}.$$

56. §.

„*II-dik alaptétel.*“ *Minden gömbháromszögben, a' leeresztett függöny által egy szöglet' felosztásából képzett két szögletek' (BAD, CAD, mellyek „csúcs-szögleteknek“ neveztetnek) pótkeblei, viszásan vannak úgy egymáshoz, mint a' mellettök fekvő oldalok' érintői.*

Ugyanis az ABD és ACD háromszögek (50. §. szerint) illy arányokat adnak:

R: pótk. BAD = ér.c : ér. AD,

R: pótk. CAD = ér. b : ér. AD;

mivel mind a' két arány' szélsö tagjai ugyanazok: tehát a' belsök viszásan arányosok, így:

pótk. BAD : pótk. CAD = ér. b : ér. c.

57. §.

„III.-dik alaptétel.“ Minden gömbháromszögben, egy oldalnak, a' leeresztett függöny által képzett darabjainak pótkeblei, úgy vannak egymáshoz, mint a' mellettök fekvő oldalok' pótkeblei.

Ugyanis az ABC és ACD egyenes-szögü gömbháromszögek, (51. §. szerint) illy arányokat adnak:

R: pótk. AD = pótk. BD : pótk. c

R: pótk. AD = pótk. CD : pótk b.

Mivel mind a' két arányban az első viszonyok ugyanazok: tehát a' hátulsó viszonyok is egyenlök, 's illy arányba jönek:

pótk. BD : pótk. CD = pótk. c : pótk. b.

58. §.

„IV-dik alaptétel.“ Minden gömbháromszögben, a' BAD és CAD csúcs-szögletek' keblei úgy vannak egymáshoz, — mint a' háromszög' talpán fekvő két szögletek' pótkeblei.

Ugyanis az ABD és ACD △-gek (52. §. szerint) illy arányokat adnak:

R: pótk. AD = keb. BAD : pótkeb. B,

R: pótk. AD = keb. CAD : pótkeb. C.

és innen :

keb. BAD : keb. CAD = pótk. B : pótk C.

59. §.

„*V-dik alaptétel.*“ *Minden gömbháromszögben, egy oldalnak, a' reá eresztett függöny által képzett darabjainak (BD, CD) keblei, a' mellettök eső szögletek' érintőinek viszás,- vagy pótérintőinek egyenes arányában vannak egymáshoz.*

Ugyanis az ABD és ACD háromszögek, (53. §. szerint) illy arányokat adnak :

R : ér. B = keb. BD : ér. AD,

R : ér. C = keb. CD : ér. AD.

innen : keb. BD : keb. CD = ér. C : ér. B

= pótér. B : pótér. C.

Már az egyenesszögü gömbháromszögeket illető VI-dik alaptételt ide nem alkalmazhatjuk; azonban még két alaptételt csináljunk.

60. §.

„*VI-dik alaptétel.*“ *Minden gömbháromszögben, egy szöglet' pótkeble annyi, mint ha a' sugár' négylege az átellenes oldal' pótkeblével sokszoroztatik, — ebből a' két mellette fekvő oldalok' pótkebleinek egymással és a' sugárrali sokszorozmánya kivonatik — végre a' maradék, ezen utóbbi két oldalok' kebleinek sokszorozmányával elosztatik.*

Legyen ABC a' feltett gömbháromszög (id. 14), — a' gömb' O középpontjából húzzunk sugárokat, OA, OB, OC, 's nyujtsuk meg azokat határozatlanul. Az OC-nek illy megnyujtásán vegyünk fel tetszés szerint egy da- Id. 14.

rabot = OD; a' D pontnál emeljünk fel az OD-re függőleges vonalat, az OAC síklap' folytatásán = DE; ugyancsak a' D pontnál, az OCB síklap' folytatásán is emeljük a' DF függönyt. Ezen két függönyök, az E és F pontban össze fognak találkozni az OA és OB sugarak' folytatásaival; 's húzván az összekötö EF vonalat, származik a' DEF síkháromszög, — mellynek D szöglete egyenlö a' gömbháromszög' C szögletével.

Ez így levén: az EFD és OEF háromszögekben a' 29 .§. szerint lesz:

$$\overline{EF}^2 = \overline{DE}^2 + \overline{DF}^2 - \frac{2DE \,.\, DF \,.\, \text{pótk.}\, EDF}{R},$$

$$\overline{EF}^2 = \overline{OE}^2 + \overline{OF}^2 - \frac{2OE \,.\, OF \,.\, \text{pótk.}\, EOF}{R}.$$

Az első egyenletet a' másodikból kivonván, és megjegyezvén, hogy $\overline{OE}^2 - \overline{DE}^2 = \overline{OD}^2$, és $\overline{OF}^2 - \overline{DF}^2 = \overline{OD}^2$: lesz

$$o = 2\overline{OD}^2 - \frac{2OE \,.\, OF \,.\, \text{pótk.}\, EOF}{R} + \frac{2DE \,.\, DF \,.\, \text{pótk.} EDF}{R}$$

$$o \,.\, R = \frac{2OD^2 \,.\, R - 2OE \,.\, OF \,.\, \text{pk.} EOF + 2DE \,.\, DF \,.\, \text{pk}\, EDF}{R}$$

vagy: $o = 2OD^2 R - 2OE.OF.\text{pk.}EOF + 2DE.DF.\text{pk.}EDF.$

innen a' pótk. EDF' értekét meghatározván:

$$\text{pótk.}EDF = \frac{2OE \,.\, OF \,.\, \text{pótk.}\, EOF - 2\overline{OD}^2 R}{2DE \,.\, DF}$$

$$\text{pótk}\ EDF = \frac{OE \,.\, OF \,.\, \text{pótk.}\, EOF - \overline{OD}^2 . R}{DE \,.\, DF.}$$

Most már ezen képletet vigyük által a' gömbháromszögre, — elnevezvén a, b, c-nek az A, B, C szögletekkel illetőleg átellenes oldalokat, 's megjegyezvén, hogy $\angle EDF = \angle C$, $\angle EOF = AB = c$ körív. E' szerint így lesz az előbbi egyenlet:

$$(x)\ldots\ldots \text{pótk.} C = \frac{OE}{DE} \times \frac{OF}{DF} \times \text{pk.c} - \frac{OD}{DE} \times \frac{OD}{DF} \times R;$$

azonban jegyezzük meg, hogy: mivel a' DOE síkháromszögben:

$$R : \text{keb.} DOE = OE : DE,$$

$$\text{tehát: } \frac{OE}{DE} = \frac{R}{\text{keb.} DOE} = \frac{R}{\text{keb.} b};$$

továbbá mivel az ODF síkháromszögben

$$R : \text{keb.} DOF = OF : DF,$$

$$\text{tehát: } \frac{OF}{DF} = \frac{R}{\text{keb.} DOF} = \frac{R}{\text{keb.} a};$$

továbbá mivel az ODE síkháromszögben $OD =$ pótk. $DOE =$ pótk.b; és $DE =$ keb. $DOE =$ keb. b:

$$\text{tehát: } \frac{OD}{DE} = \frac{\text{pótk. } b}{\text{keb. } b.};$$

végre mivel az OFD síkháromszögben az $OD =$ pótk .$DOF =$ pótk.a, és $DF =$ keb. $DOF =$ keb. a:

$$\text{tehát: } \frac{OD}{DF} = \frac{\text{pótk. } a}{\text{keb. } a.}.$$

Már a' fentebbi (x) egyenletben illyen helyettesítésekkel élvén, lesz:

$$\text{pótk.} C = \frac{R}{\text{keb.} b} \times \frac{R}{\text{beb.} a} \times \text{pótk.c} - \frac{\text{pótk.} b}{\text{keb } b} \times \frac{\text{pótk.} a}{\text{keb.} a} \times R.$$

$$\text{vagy: pótk.} C = \frac{R^2 \times \text{pótk.c} - R \times \text{pótk.} a \times \text{pótk.} b}{\text{keb.} a \times \text{keb.} b.}$$

Hasonlólag áll a' többi szögletekre nézve is:

$$\text{pótk. } A = \frac{R^2 \times \text{pótk. } a - R \text{ pótk. } b \times \text{pótk. } c}{\text{keb. } b \times \text{keb. } c}$$

$$\text{pótk. } B = \frac{R^2 \times \text{pótk.} b - R. \text{ pótk.} a \times \text{pótk. } c}{\text{keb. } a \times \text{keb. } c}$$

61. §.

Ezen hatodik alaptétel tehát három egyenletet ad, mellyekben a' gömbháromszög' mind a' három oldalai, és mind a' három szögletei benfoglaltatnak. Innen ezen 3 egyenlet, minden lehető esetek' kifejtésére elégséges volna; és az eddig lehozott többi egyenleteinket ezekből mind le lehetne hozni; — de könnyebb azokat az előadott módon fejteni ki.

Ezen egyenletek főként a' szögletek' kikeresésére használtatnak, azon esetben, ha minden oldalok adatvák. Csak az van még hátra, hogy ollyanokká tegyük őket, hogy a' logarithmusokat könnyen lehessen rájok alkalmazni.

Erre nézve: legyen $R = 1$, — ésígy valamellyik azon egyenletek közül, p. o. az elsö így lesz:

$$\text{pótk. } C = \frac{\text{pótk. } c - \text{pótk. } a \times \text{pótk. } b}{\text{keb. } a \times \text{keb. } b}$$

Vonjuk ki ezen egyenlet' mind két részét 1-ből

$$1 - \text{pótk. } C = 1 - \frac{\text{pótk.} c + \text{pótk. } a \times \text{pótk. } b}{\text{keb. } a \times \text{keb. } b},$$

$$\text{vagy: } 1 - \text{pótk. } C = \frac{\text{keb. } a \,.\, \text{keb.} b - \text{pótk.} c + \text{pk.} a \,.\, \text{pk.} b}{\text{keb. } a \,.\, \text{keb. } b}$$

$$1 - \text{pótk.} C = \frac{\text{keb.} a \,.\, \text{keb.} b + \text{pótk.} a \,.\, \text{pótk.} b - \text{pótk.} c}{\text{keb. } a \,.\, \text{keb. } b}.$$

Úgyde 21. §. szerint:

$$\text{keb. } a \,.\, \text{keb.} b + \text{pótk. } a \,.\, \text{pótk. } b = \text{pótk. } (a - b).$$

ésígy:

$$1 - \text{pótk.}\, C = \frac{\text{pótk.}\,(a-b) - \text{pótk.}\, c}{\text{keb.}\, a \,.\, \text{keb.}\, b.} \;\ldots\ldots\; (x)$$

Úgyde 18. §. (13) szerint:

$$\text{pótk.}\, C = 1 - 2\text{keb.}\,\tfrac{1}{2}\, C\,;$$

ha ezen egyenlet' mindkét részét kivonjuk 1-ből:

$$1 - \text{pótk.}\, C = 1 - 1 + 2\text{keb.}^2\, \tfrac{1}{2} C$$

vagy: $1 - \text{pótk.}\, C = 2\text{keb.}^2\, \tfrac{1}{2}\, C \,\ldots\ldots\ldots\, (z)$

Az (x) és (z) egyenletek' első részei ugyanazok levén: az utolsókat tegyük egyenletbe:

$$2\text{keb}^2.\, \tfrac{1}{2}\, C = \frac{\text{pótk.}\,(a-b) - \text{pótk.}\, c}{\text{keb.}a \,.\, \text{keb.}b}$$

Azonban a' 23. §. 4. szerint ($q = a - b$, $c = p$ levén):

$$\text{pk.}(a-b) - \text{pk.}\, c = 2\text{keb.}\tfrac{1}{2}(a-b+c.)\text{keb.}\tfrac{1}{2}(c-a+b)$$

innen:

$$\text{keb.}^2\, \tfrac{1}{2}\, C = \frac{\text{keb.}\,\tfrac{1}{2}\,(a-b+c)\,.\,\text{keb.}\,\tfrac{1}{2}\,(c-a+b)}{\text{keb.}\, a \,.\, \text{keb.}\, b}$$

$$\text{és}: \text{keb.}\,\tfrac{1}{2}\, C = \sqrt{\frac{\text{keb.}\tfrac{1}{2}(a-b+c).\text{keb.}\tfrac{1}{2}(c-a+b)}{\text{keb.}\, a \,.\, \text{keb.}\, b}}$$

És most legyen: $a + b + c = 2s$, innen $a - b + c = 2s - 2b$, $c - a + b = 2s - 2a$, és $s = \tfrac{1}{2}(a + b + c)$:

e' szerint végre lesz:

$$\text{keb.}\,\tfrac{1}{2}\, C = \sqrt{\frac{\text{keb.}\,(s-a)\,.\,\text{keb.}\,(s-b)}{\text{keb.}a \,.\, \text{keb.}\, b}}$$

$$\text{épen így}: \text{keb.}\,\tfrac{1}{2}\, A = \sqrt{\frac{\text{keb.}\,(s-b)\,.\,\text{keb.}\,(s-c)}{\text{keb.}\, b \,.\, \text{keb.}\, c}}$$

$$\text{keb.} \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\text{keb.}(s-a) \,.\, \text{keb.}(s-c)}{\text{keb.}a \,.\, \text{keb.}c}}$$

így félszögleteket találván, azokat kétszer vesszük; — azonban logarithmusokkal dolgozhatunk.

62 §.

A' 60-dik §-ban kifejtett képleteket következő alakban is lehet, és szokták feltenni; megjegyezvén, hogy legyen $R = 1$:

$$\text{pótk.}a = \text{pótk.}b \,.\, \text{pótk.}c + \text{pótk.}A \,.\, \text{keb.}b \,.\, \text{keb.}c,$$
$$\text{pótk}\, b = \text{pótk.}a \,.\, \text{pótk.}c + \text{pótk.}B \,.\, \text{keb.}a \,.\, \text{keb.}c,$$
$$\text{pótk.}c = \text{pótk.}a \,.\, \text{pótk.}b + \text{pótk.}C \,.\, \text{keb.}a \,.\, \text{keb.}b,$$

melly képletek azon esetben használtatnak, ha *valamelly gömbháromszögben egy oldalt keresnek, kiadatván a' másik két oldal, és a' köztök eső szöglet.*

63. §.

„*VII-dik alaptétel.*“ *Minden gömbháromszögben, egy oldal' pótkeble annyi, mint ha a' sugár' négylege az az átellenes szöglet' pótkeblével sokszoroztatik, — ehhez a' két mellette eső szögletek' pótkebleinek egymással, és a' sugárrali sokszorozmánya hozzáadatik, — 's végre az egész, ez utóbbi két szögletek' kebleinek sokszorozmányával elosztatik.*

Ezen tételt meg lehet mutatni az úgy nevezett egészitő háromszögek' segitségével. T. i. tanultuk a' tértanban, a' gömbháromszögekről, hogy minden gömbháromszögnek van egy úgy nevezett egészitő háromszöge, melly utóbbinak szögletei, az előbbi' oldalainak,

— és az utóbbinak oldalai, az előbbi' szögleteinek megfelelőleg egészitői 180 fokra. Így egy gömbháromszög, mellynek szögletei A, B, C, oldalai a, b, c: megfelel mindig egy másik egészitő gömbháromszögnek, mellynek oldalai: $180^0—A, 180^0—B, 180^0—C$, — szögletei gedig: $180^0—a$, $180—b$, $180—c$.

Már miután valamelly ABC gömbháromszögre nézve, valamelly képlet meg van mutatva: azt az egészitő háromszögre is alkalmazhatni. P. o. — a' felvett czélhoz képest, a' 60. §-bani ezen képletet:

$$\text{pótk. } A = \frac{R^2.\text{pótk. } a - R.\text{pótk. } b\ .\ \text{pótk.} c}{\text{keb. } b.\ \text{keb. } c}$$

egészitő $\triangle$-re alkalmazván, lesz:

$$\text{pk.}(180^0-a) = \frac{\text{R.pk.}(180^0-A)-\text{R.pk.}(180-B).\text{pk.}(180^0-C)}{\text{keb.}(180^0-B).\ \text{keb.}(180^0-C).}$$

már tudván, hogy az egészitő körívek' pótkeblei az egészített körívek' pótkebleivel egyenlők, de nemleges jegygyel:

$$-\text{pótk. } a = \frac{R^2.-\text{pótk.}A - R\ (-\text{pótk.}B\ .\ -\text{pótk.}C)}{\text{keb.}B\ .\ \text{keb.}C}$$

$$\text{vagy: } -\text{pótk.}a = \frac{-R^2.\text{pótk.}A - R\ (\text{pótk.}B\ .\ \text{pótk.}C)}{\text{keb.}B\ .\ \text{keb.}C}$$

minden jegyeket ellenkezőkre cserélvén:

$$\text{pótk.} a = \frac{R^2.\ \text{pótk.}A + R\ .\ \text{pótk.}B\ .\ \text{pótk.}C}{\text{keb.}B\ .\ \text{keb.}C.},$$

melly képlet mutatja a' kimondott alaptételt, — 's használtatik akkor, *ha a' gömbháromszögben egy oldal kerestetik, kiadatván mind a' három szögletek.* — Látnivaló, hogy ezen képlet felette hasonló ahhoz, melly által 3 oldalból egy szögiet kerestetik, — az ottani oldalok itt szögletekké, a' szögletek oldalokká változtak, — 's csak az a' különbség, hogy a' pótkeblek' sokszorozmánya amott (—) itt (+) jegygyel bir.

Hasonlólag a' többi oldalokra nézve:

$$\text{pótk. } b = \frac{R^2.\text{pótk. } B + R.\text{pótk. } A.\text{pótk. } C}{\text{keb. } A.\text{keb. } C}$$

$$\text{pótk. } c = \frac{R^2.\text{pótk. } C + R.\text{pótk. } A.\text{pótk. } B}{\text{keb. } A.\text{keb. } B.}$$

Azonban ezen képleteket is vegyük olly alakba, hogy a' logarithmusokat könnyen lehessen reájok alkalmazni. — Erre nézve legyen $R = 1$, — 's az egyenlet' mindkét részét vonjuk ki 1-ből; — lesz:

$$1 - \text{pótk.} a = \frac{\text{keb.} B\,\text{keb.} C - \text{pótk.} A - \text{pótk.} B.\text{pótk.} C}{\text{keb.} B.\text{keb.} C};$$

úgyde, mint már többször láttuk: (§. 18. és 21.)

$$1 - \text{pótk.} a = 2\text{keb}^2 \tfrac{1}{2} a,$$

és: $\text{keb.} B.\text{keb.} C - \text{pótk.} B.\text{pótk.} C = -\text{pótk.} (B+C)$

innen:

$$2\text{keb.}^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{-\text{pótk.} (B+C) - \text{pótk.} A}{\text{keb.} B.\text{keb.} C.}$$

Azonban a' 23. §. 3. szerint ($p = B + C$, $q = A$ levén) változtatott jegygyel:

$$2\text{keb.}^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{-2\text{pótk.}\tfrac{1}{2}(A+B+C).\text{pk.}\tfrac{1}{2}(B+C-A)}{\text{keb.} B.\text{keb.} C}.$$

innen végre:

$$\text{keb.}\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\text{pk.}\tfrac{1}{2}(A+B+C).\text{pk.}\tfrac{1}{2}(B+C-A)}{\text{keb.} B.\text{keb.} C}}.$$

Ámbár ezen képletben a' gyökérjegy alatti mennyiség (—) jegygyel áll: mindazáltal az mindig igenleges.

Mert tudjuk, hogy a' gömbháromszögben, a' 3 szögletek' összege $(A+B+C)$ mindig több 180^0-nál, következöleg:

$$\tfrac{1}{2}(A+B+C) > 90^0,$$

észígy: pótk. $\frac{1}{2}(A+B+C)$ mindig (—) jegyü; már a' mütételi (—) jegy sokszoroztatván a' pótkebel' (—) jegyével, (+) jegyet ad. — Továbbá pótk. $\frac{1}{2}(B+C-A)$, t. i. a' másik sokszorozó mindig igenleges, — mert $B+C-A$ mindig kisebb, mint 180^0, észígy $\frac{1}{2}(B+C-A) < 90^0$, észígy annak pótkeble mindig (+) jegyü.

64. §.

A' 63. §-ban kifejtett képleteket is lehet, 's szokták e' következö alakban tenni fel (megjegyezvén, hogy $R=1$):

$$\text{pótk.}\,A = \text{pótk.}\,a\,.\,\text{keb.}\,B\,.\,\text{keb.}\,C - \text{pótk.}\,B\,.\,\text{pótk.}\,C,$$
$$\text{pótk.}\,B = \text{pótk.}\,b\,.\,\text{keb.}\,A\,.\,\text{keb.}\,C - \text{pótk.}\,A\,.\,\text{pótk.}\,C,$$
$$\text{pótk.}\,C = \text{pótk.}\,c\,.\,\text{keb.}\,A\,.\,\text{keb.}\,C - \text{pótk.}\,A\,.\,\text{pótk.}\,B;$$

melly képleteket akkor használják, ha *valamelly gömbháromszögben egy szögletet keresnek, kiadatván a' másik két szöglet, 's a' mellettök fekvő oldal.*

65 §.

A' lehozott alaptételek elég, söt felesleges egyenleteket szolgáltatnak a' gömbháromszögek' kifejtése körül elöjöhető minden esetekre. És a' lehozott képleteket egyenesen, minden nehézség nélkül alkalmazhatni akkor, ha a' kérdésben forgó körívek, vagy szögletek 90^0-nál kisebbek. — De hátha annál nagyobbak: akkor mit tegyünk?

Figyelmezzünk azon szabályokra, mellyeket a' 8, 9. §-ban, a' háromszögtani függvények' algebrai jegyeit illetőleg adánk. Ha ezekre pontosan ügyelünk a' számitásokban: a' keresett elem' kifejlő jegye megfogja határozni, a' szöglet' vagy körív' mellyik körnegyedbe tartozását; — e' mellett a' feladat' körülményeit is figyelembe vevén.

Azonban jegyezzük meg, hogy nagyobb szögletnek nagyobb oldal van általellenében, és viszont. Honnan következik, hogy — a' háromszög' hat részeit *elemeknek* nevezvén, — *valamelly elem mindig ugyanazon fajta azon másik elemmel, mellynek átellenében van*, — azaz: ha a' szöglet $= 90^0$: úgy a' vele átellenes oldal is $= 90^0$; ha a' szöglet nagyobb, vagy kisebb 90^0-nál, úgy a' vele átellenes oldal is nagyobb vagy kisebb 90^0-nál, — és viszont.

Már az ollyan gömbháromszögeknél, mellyekben a' szöglet, vagy körív 180^0-nál felebb nem megy, a' keblek, pótkeblek, érintők és pótérintők, mellyek által határoztatnak meg minden képleteinkben az elemek, azon két szögletre vagy körívre vitethetnek, mellyek egymást 180^0-ra egészítik, ésígy kettős jelentésük van. — A' két egészitők közül mellyikre vitessék a' kifejtett elem: ha az *kebellel* van meghatározva, akkor általlátni legnehezebb, 's csak a' körülményekből tudhatjuk meg; — mert a' két, egymást 180^0-ra egészitő körívek' vagy szögletek' keble ugyanaz, még pedig mindkettőre nézve (+) jegyű. — De ha az elem pótkebellel, vagy érintővel, vagy pótérintővel van meghatározva: annak (+) vagy (—) jegye megmutatja, alatta van-e 90^0-nak, vagy felette; tudván, hogy ha a' pótkebel, vagy érintő, vagy pótérintő (+) jegyű:

akkor az annak megfelelő elem 90^0-nál kisebb; — ha pedig ezen függvények közül valamellyik (—) jegyü: akkor a' megfelelő elem 90^0-nál nagyobb.

Azonban vannak esetek, főként az égtanban, midőn ollyan háromszögeket kell kifejteni, mellyekben ez vagy amaz elem, szöglet, vagy oldal, bárminő nagyságu lehet 0-tól egész 360^0-ig. Ezen esetek' kifejtésében sincs semmi nehézség, ha a' függvények' illető algebrai jegyeit pontosan tesszük fel, és a' körülményekre figyelmezünk. A' számitásokban e' következő (már fentebb ugyan előadott) szabályokhoz tartsuk magunkat:

1) *A' kebel (+) jegyű, ha a' megfelelő elem, 0 és 180^0 közt esik; ellenben (—) jegyű, ha az elem 180^0-t túlhalad.*

2) *A' pótkebel (—) jegyű, ha a' megfelelő elem 90^0 és 270^0 közt esik; — ellenben (+) jegyű 270^0-tól 90^0-ig.*

3) Mivel érintő $A = \dfrac{\pm \text{keb.} A}{\pm \text{pótk.} A}$: innen látnivaló, hogy *az érintő' jegye a' körület' minden következő negyedében változik; jelesen (+) jegyű az, az első és harmadik körnegyedben, — ellenben (—) jegyű a' másodikban és negyedikben.*

4) *A' pótérintők' szabálya épen az, mi az érintőké;* mivel

$$\text{érint.} A = \frac{1}{\text{pótér.} A}, \text{ és: pótér } A = \frac{1}{\text{érint.} A}.$$

Ezek szerint, ha valamelly elem, valamelly képlet által meghatároztatik: annak értéke mindig kétféle lehet, 's a' körülmények mutatják meg, mellyiket kell venni. P. o.

1) Ha keb. $x = + a$: ezen kebel szintúgy vitetik az x körívre, mint annak egészitöjére $(180-x)$. És ha keb. $x = - a$: ezen kebel szintúgy vitetik a' $(180^0 + x)$re, mint a' $(360^0 - x)$re.

2) Ha pótk. $x = + b$: nem tudjuk, ha csak a' feladat' körülményeiből nem világos, hogy az x a' körület' első körnegyedében van-e, vagy az utolsóban. — És ha pótk. $x = - a$: nem tudjuk, ha az x a' második körnegyedben esik-e, vagy a' harmadikban.

3) Ha a' számitásban kijő: érint. $x = + c$: ezen érintő szintúgy illeti az x körívet, mint a' $(180^0 + x)$et; — és ha: érint $x = - c$: ezen érintö színtúgy illeti a' 90^0 és 180^0 között eső, mint a' 270^0 és 360^0 között eső körívet.

De ha érint. $x = \frac{m}{n}$: akkor az illető körív szorosan van meghatározva. Mert ha van $+ m$, $+ n$: úgy $x < 90^0$; ha van $+ m$, $- n$: akkor $x > 90^0$; ha van $- m$, $- n$: úgy $x > 180^0$; végre ha van $- m$, $+ n$: akkor $x > 270^0$.

Ezen szabályok könnyük, kimeritőbbek, 's czélszerübbek, mint sok mértani munkákban található, bonyolodott, 's gyakran csaló képletek.

HARMADIK CZIKKELY.

Az egyenes-szögű gömbháromszögek' kifejtéséről.

Id. 12. Legyen az ABC gömbháromszögben (id. 12.) a' B szöglet egyenes, — az A, és C hajlottak. A' B szöglettel általellenes-, vagyis a' feszes oldalt nevezzük *h*-nak,

— az A és C szögletekkel általellenes oldalokat pedig megfelelőleg *a*, *b*-nek. Az 5 elemek közül t. i. A, C, h, a, c — kettő kiadatván: a' háromszög' kifejtése körül 10 különböző eset jöhet elő; de mivel azok közül némellyek hasonfajták: a' lehető különböző eseteket hat feladatban kimeríthetjük.

66. §.

„*I-ső feladat.*" *Adatván a' feszes-oldal h, és egy hajlott szöglet C: kikeresni a' másik két oldalt a, és c, — és az A hajlott szögletet.*

Erre nézve imezek az egyenletek:

I. *Alaptét.* $\text{keb. } c = \dfrac{\text{keb. } h \,.\, \text{pótk. } C}{R}$,

IV. *Alaptét.* $\text{érint. } a = \dfrac{\text{érint. } h \,.\, \text{pótk. } C}{R}$;

VI. *Alaptét.* $\text{pótér. } A = \dfrac{\text{pótk. } h \,.\, \text{érint. } C}{R}$.

Ezen 3 kepletek, a' háromszög' teljes kifejtését adják; és nem marad semmi kétséges; mert a' *c* oldal az átellenes—kiadatott C szöglettel ugyanazon fajta; az *a* oldal' és A szöglet' fajtája pedig, az ezeket meghatározó, kiadatott elemek által meghatároztatik.

A' kifejtés épen így történik, ha a' C szöglet helyett az A adatik ki, — csak a' betük fognak változni.

67. §.

„*II-dik feladat.*" *Adatván a' feszes-oldal h, és egyik mellék-oldal, a: kikeresni az A és C hajlott szögleteket, és a' c mellékoldalt.*

I. *Alaptét.* $\text{keb.} A = \frac{R \,.\, \text{keb.} a}{\text{keb.} h}$;

II. *Alaptét.* $\text{pótk.} C = \frac{\text{érint.} a \,.\, \text{pótér.} h}{R}$;

III. *Alaptét.* $\text{pótk.} c = \frac{R \,.\, \text{pótk.} h}{\text{pótk.} a}$.

A' keresett elemek' fajtái a' kiadottakéi által meg vannak határozva.

Ha az *a* oldal helyett a' *c* adatik: a' betük' felcserélése mellett, a' kifejtés ugyanaz lesz.

68. §.

„*III-dik feladat.*" *Adatván a' két mellék-oldal, a és c: kikeresni a' feszesoldalt h, és a' hajlott szögleteket A és C.*

III. *Alaptét.* $\text{pótk.} h = \frac{\text{pótk.} a \,.\, \text{pótk.} c}{R}$;

V. *Alaptét.* $\text{érint.} A = \frac{R \,.\, \text{érint.} a}{\text{keb.} c}$;

V. *Alaptét.* $\text{érint.} C = \frac{R \,.\, \text{érint.} C}{\text{keb.} a}$;

a' fajokról nincs semmi kétség.

69. §.

„*IV-dik feladat.*" *Adatván az a mellékoldal, és az átellenes A szöglet: kikeresni a' többi 3 elemeket, h, c, és C.*

I. *Alaptét.* $\text{keb.} h = \frac{R \,.\, \text{keb.} a}{\text{keb.} A}$;

V. *Alaptét.* $\text{keb. } c = \frac{R \text{ . érint. } a}{\text{érint. } A}$;

IV. *Alaptét.* $\text{keb. } C = \frac{R \text{ . pótk. } A}{\text{pótk. } a.}$

Ezen kifejtés a' *kétes esetek* közé tartozik; — a' 3 ismeretlenek mind *keblek* által határoztatnak meg; — de azon értéket kell eleibe tenni a' másiknak, melly inkább egyez azon elvvel, miszerint a' C szöglet, a' c oldallal egyfajta tartozik lenni.

A' megfejtés ugyanez lesz, ha a' C szöglet 's vele átalellenes c oldal adatik ki, — csupán a' betük változnak.

70. §.

„V-dik feladat.“ Adatván egy mellékoldal a, és a' mellette eső szöglet C: kikeresni a' többi 3 elemeket, h, c és A.

II. *Alaptét.* $\text{pótér. } h = \frac{R \text{ . pótk. } C}{\text{érint. } a} = \frac{\text{pótér.} a \text{ . pk. } C}{R}$

V. *Alaptét.* $\text{érint. } c = \frac{\text{keb.} a \text{ . érint.} C}{R}$;

IV. *Alaptét.* $\text{pótk. } A = \frac{\text{pótk.} a \text{ . keb.} C}{R}$;

a' fajokra nézve nincs semmi kétség.

71. §.

„IV-dik feladat.“ Adatván a' hajlott szögletek, A és C: kikeresni a' 3 oldalt, h, a, c.

VI. *Alaptét.* $\text{pótk. } h = \frac{\text{pótér. } A \text{. pótér. } C}{R}$;

IV. *Alaptét.* pótk. a $= \frac{R \,.\, \text{pótk } A}{\text{keb.}\, c}$;

IV. *Alaptét.* pótk. c $= \frac{R \,.\, \text{pótk. } C}{\text{keb. } A.}$.

A' fajokra nézve nincs semmi kétség.

NEGYEDIK CZIKKELY.

Bármi nemű gömbháromszögek' kifejtéséről.

Itt is a' háromszögek' kifejtését hat feladatokban ki fogjuk meríteni.

72. §.

„*I-ső feladat.*" *Adatván két oldal AC=b, és AB=c, 's az egyik adott oldallal átellenes B szöglet: kikeresni a' 3-dik oldalt BC=a, és a' többi két szögleteket A és C.* (id. 13.)

1) A' C szögletet közvetlenül kikereshetni az ide-
Id. 13. tartozó *I-ső alaptétel'* egyenletén (55. §.)

$$\text{keb. } C = \frac{\text{keb.} B \,.\, \text{keb.} c}{\text{keb.}\, b}.$$

2) Hogy a' BC=a oldalt kikereshessük: eresszünk reá, az átellenes szögletből, AD függönyt,— vagy ha szükség, eresszük azt ezen BC oldal' folytatására. A' BC oldal annyi lesz, mint a' függöny melletti két darab körívek' összege, vagy illetőleg különbsége. És így ezen két darab köríveket, BD és DC, kell kikeresni. — A' BD-t kikeressük a' BDA egyenesszögü gömbháromszögben, az ezeket illető *II-dik alaptétel* szerint, így:

$$\text{érint. BD} = \frac{\text{pótk.} B \,.\, \text{érint.} c}{R};$$

a' CD-t pedig a' III. *alapt.* szerint:

$$\text{pótk.}\,CD = \frac{\text{pótk.}\,b\,.\,\text{pótk.}\,BD}{\text{pótk.}\,c}.$$

3) Az *A* szöglet = BAD ± DAC. Ésígy ezen két szögleteket kell külön kikeresni. A' BAD szögletet megtaláljuk az *egyenes-sz.hár.sz. VI. alapt. szerint, így:*

$$\text{pótér.}\,BAD = \frac{R\,.\,\text{pótk.}\,c}{\text{pótér.}\,B} = \frac{\text{pótk.}\,c\,.\,\text{ér.}\,B}{R}.$$

A' CAD szögletet pedig megtaláljuk a' *bárminemű hár.sz. II. alapt.* szerint így:

$$\text{pótk.}\,CAD = \frac{\text{ér.}\,c\,.\,\text{pótk.}\,BAD}{\text{ér.}\,b}.$$

Az ismeretlenek fajtáira nézve nincs semmi kétség.

73. §.

„II-dik feladat." Adatván két oldal, a, és c, 's a' köztök eső szöglet B: kikeresni a' 3-dik oldalt b, és a' másik két szögletet, A és C.

1) A' *b* oldalt kikereshetni e' következő képlet szerint (62. §.):

$$\text{pótk.}\,b = \text{pótk.}\,a\,.\,\text{pótk.}\,c + \text{pótk.}\,B\,.\,\text{keb.}\,a\,.\,\text{keb.}\,c.$$

Vagy pedig az átellenes szögletből függönyt eresztvén a' BC oldalra, — kiszámitjuk a' DB darabot, mint előbb, 's kivonjuk azt az ismert BC-ből, vagy illetőleg hozzáadjuk, — 's lesz = CD. Akkor az ismeretlen oldalt *b*, kikeressük így: (57. §.)

$$\text{pótk.}\,b = \frac{\text{pótk.}\,c\,.\,\text{pótk.}\,CD}{\text{pótk.}\,BD.}$$

2) Épen az előbbi szerkezet' nyomán: miután a' BD és CD darabok ki vannak számítva: kikeressük a' C szögletet (59. §.) így:

$$\text{pótér. C} = \frac{\text{pótér. B . keb.CD}}{\text{keb. BD}}.$$

3) Épen illy módon kereshetni ki az A, harmadik szögletet.

A' fajokra nézve nincs semmi kétség.

74. §.

„III-dik feladat.“ Adatván három oldal, a, b, c: megtalálni a' 3 szögletet, A, B, C.

Erre nézve (61. §. szerint) ezek a' képletek:

$$\text{keb. } \tfrac{1}{2}\text{ A} = \sqrt{\frac{\text{keb. (s—b) . keb. (s—c)}}{\text{keb.b . keb.c}}};$$

$$\text{keb. } \tfrac{1}{2}\text{ B} = \sqrt{\frac{\text{keb. (s—a) . (keb. (s—c)}}{\text{keb. a . keb.c}}};$$

$$\text{keb. } \tfrac{1}{2}\text{ C} = \sqrt{\frac{\text{keb. (s—a) . keb. (s—b)}}{\text{keb. a . keb.b}}}.$$

mellyekben $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

75. §.

„IV-dik feladat.“ Adatván két szögletek A, és B, a' mellettök fekvő c oldallal: kikeresni a' 3-dik szögletet C, és a' többi oldalokat, a, b.

1) A' C szöglet' kikeresése végett: keressük ki előbb a' BAD szögletet, mellyet az A-ból leeresztett AD függöny képez, — az *egy.sz.h.sz. VI. alapt. szerint így:*

$$\text{pótér. BAD} = \frac{\text{pótk.c . ér. B}}{\text{R}} = \frac{\text{R . pótk.c}}{\text{pótér. B}}.$$

Már ismervén BAD-t: tudva lesz a' CAD szöglet is, melly $= A - BAD$. — Már a' C szögletet kikeressük (*bármin. hár.sz. III. alapt.*) így:

$$\text{pótk. } C = \frac{\text{pótk. } B \times \text{keb. } CAD}{\text{keb. } BAD}.$$

De ki lehet a' C szögletet keresni egyenesen is, 64. §. szerint így:

$$\text{pótk. } C = \text{pótk. } c \times \text{keb. } A \times \text{keb. } B - \text{pótk. } A \times \text{pótk. } B.$$

2) A' két oldalok közül egyiknek, p. o. a' b-nek kikeresése végett, előbb kikeressük a' BAD szögletet (*egyen. hrsz. VI. alapt. szerint*) így:

$$\text{pótér. } BAD = \frac{R \cdot \text{pótk. } c}{\text{pótér. } B} = \frac{\text{pótk. } c \times \text{ér. } B}{R};$$

azután megtaláljuk a' b oldalt ezen egyenleten (*bármin. hrsz. II. alapt.*)

$$\text{érint. } b = \frac{\text{érint. } c \cdot \text{pótk. } BAD}{\text{pótk. } CAD}.$$

76. §.

„*V-dik feladat.*" *Adatván két szöglet, B és C, és az egyikkel átellenes oldal, b: megtalálni a' másik két oldalt, a, c, és a'* 3-*dik szögletet, A.*

1) A' c oldalt, melly a' C szöglettel általellenben van, kikeressük így: (*bármin. hársz. I. alapt.*)

$$\text{keb. } c = \frac{\text{keb. } b \times \text{keb. } C}{\text{keb. } B}.$$

2) Hogy az a oldalt, melly a' két adott szöglet mellett fekszik, megtalálhassuk: előbb kikeressük a' BD darabot (*egyensz. hársz. II. alapt.*) így:

$$\text{ér. BD} = \frac{\text{pótk. B} \times \text{ér. c}}{R},$$

és a' másik CD darabot (*bármin. hrsz. V. alapt*) így:

$$\text{keb. CD} = \frac{\text{ér. B} \times \text{keb. BD}}{\text{ér. C.}} = \frac{\text{pótér. C} \times \text{keb. BD}}{\text{pótér. B}},$$

és ekkor meg van találva az $a = \text{BD} \pm \text{CD}$.

3) A' 3-dik szöglet A, annyi mint a' BAD és CAD szögletek' összege, vagy illetőleg különbsége; ésígy ezen szögleteket kell külön kiszámítni, e' következő képleteken:

$$\text{(54. §.) pótér. BAD} = \frac{\text{pótk. c} \times \text{ér. B}}{R},$$

$$\text{(56. §.) pótk. CAD} = \frac{\text{ér. c} \times \text{pótk. BAD}}{\text{ér. b.}}.$$

De miután már az *a* oldalt kikerestük, egyenesen is kikereshetjük az A-t, a' 64. §. szerint, így:

$$\text{pótk. A} = \text{pótk. a} \times \text{keb. B} \times \text{keb. C} - \text{pótk. B} \times \text{pótk. C.}$$

77. §.

„*VI-dik feladat.*“ *Adatván 3 szöglet, A, B, C: kikeresni a' 3 oldalt, a, b, c.*

Erre szolgálnak e' következő 3 képletek: (63. §.— *bárm. hrsz. VII. alapt.*)

$$\text{keb.}\tfrac{1}{2}\text{a} = \sqrt{\frac{-\text{pk.}\frac{1}{2}(A+B+C)\,.\,\text{pk.}\frac{1}{2}(B+C-A)}{\text{keb. B} \times \text{keb. C}}}$$

$$\text{keb.}\tfrac{1}{2}\text{b} = \sqrt{\frac{-\text{pk.}\frac{1}{2}(A+B+C)\,.\,\text{pk.}\frac{1}{2}(A+C-B)}{\text{keb. A} \times \text{keb. C}}},$$

$$\text{keb.}\tfrac{1}{2}c = \sqrt{\frac{-\text{pk.}\tfrac{1}{2}(A+B+C)\,.\,\text{pk.}\tfrac{1}{2}(A+B-C)}{\text{keb.}\,A \times \text{keb.}\,B.}}$$

Jegyz. A' gömbháromszögek' előadott kifejtésében szembetűnő, hogy akármelly elem legyen ismeretlen, meglehet azt határozni követlenül, vagyis az adott elemekből egyenesen. — Azonban, midőn a' gömbháromszög' több elemei keresendők: nem szükség mindnyáját különállólag csupán az adottakból határozni meg, — hanem miután a' keresendőkből egyet megtaláltunk, azt a' többiek' keresésében már, mint adottat, használhatjuk, — 's így tovább.

KÚPSZELETTAN.

Bevezetés.

---

1. §.

Az egyenes vonal csak egy-fajta lehet, — mint annak természetéből világos, — 's több egyenes vonalak csak hosszaságukra és fekvésükre nézve lehetnek különbözők. Ellenben a' görbe vonalak temérdek fajták lehetnek, mellyek mind különböző természetűek 's szerkezetűek Ezek közűl a' mértanban csak azokról lehet szó, mellyek bizonyos és határozott szábályok szerint szerkeztetnek. Ezeket nevezik *szabályszerű görbe vonalaknak*, az ellenkezőket *szabálytalanoknak*.

Ámbar általában a' görbék' tana a' felsőbb mértanba tartozik: mindazáltal, mivel azon görbék, mellyek a' kúpon történhető szelések által származnak, az alkalmazott mértanban felette használatosok; azonban azok' kifejtésére az elemi mértan elégséges: czélszerű lesz itt azokról valamit tanulnunk.

2. §.

A' görbék általában, 's így a' kúpszeletek is, egyenletek által határoztatnak meg, mellyek a' határozatlanokhoz tartoznak. Már a' szerint, a' mint ezen egyenletekben az ismeretlenek, másod-, harmad-, vagy még felsőbb hatványon jőnek elő: az ezen egyenleteknek megfelelő görbék is másod-, harmad-, vagy még felsőbb rangúak. — A' következőkből ki fog tetszeni, hogy a' kúpszeletek mind másod-rangú görbék.

3. §.

Ha az egyenes körkúp valamelly síklap által keresztül metszetik, bárminő fekvése legyen a' metsző síklapnak, a' kúp' felületén görbe vonal származik; kivevén azon esetet, ha a' metsző lap a' kúp' tengelye' irányán megy, — mert akkor a' metsző lap egy egyenesszáru síkháromszög. — E' szerint a' kör is kúpszelet, vagyis másodrangú görbe. — Azonban kúpszeleteknek sajátlag azon háromféle görbéket nevezik, mellyeket a' pergai Apollonius — kr. e. III-dik században — fejtett ki elsőben, — mellyek is ezek: *körkör* (ellipsis), *mentelék* (hyperbola), és *hajtalék* (parabola). — A' *körkör*, mint kúpszelet, az egyenes kúp' derekát, a' fenékkel nem egyközüleg keresztül metsző hosszudadkerek síklap' párkányozata. — A' *mentelék*, az egyenes kúp' oldalából, a' tengelylyel egyközüleg, ésígy a' fenékre függőlegesen levágható szelet' síkjának párkányozata; melly síkon, ha az felfelé tovább folytattatik, és az egyenes kúp' hegyire egy másik egyenlő kúp függőlegesen, hegyivel, ésígy felforditva állíttatik, ezen utóbbi kúpból is, az előbbi mentelékkel egyenlő, de ellenkező fekvésű mentelék fog állani; 's e' két megfelelő mentelékek' figyelembe vétele, az illető szabályok' kifejtésére szükséges. — A' *hajtalék*, az egyenes kúp' tömegéből, annak egyik oldalával egyközüleg vágott szelet' síkjának párkányozata. Lássunk ezekről különkülön.

ELSŐ CZIKKELY.

A' körkör-ről (ellipsis).

4. §

A' *körkör* ACBDA (id. 1.) ollyan önmagába visszatérő, 's így udvar-területét teljesen bezáró görbe vonal, mellynek azon tulajdona van, hogy ha rajta akárhol felveszünk két pontot, mint G és C, ezek közül egyiknek az udvarterületben levő két bizonyos pontoktól F és f, mellyek *gyülpontok*nak, vagy *góczok*nak (focus) neveztetnek, összeges távolsága épen annyi, mint a' másiké. T. i. GF + Gf = CF + Cf. Id. 1.

Az AB és CD vonalak, mellyek a' körkör' legnagyobb hosszát és szélességét mérik, neveztetnek *nagy-* és *kis tengelyek*nek. Ezek függőlegesen állnak egymásra, — 's a' körkör' közép-pontján egymást két-két egyenlő részekre osztják. — A' *góczok* F, f, a' nagy tengelyen esnek, az E közép-ponttól egyenlő távolságra. A' nagy tengely' két végpontjai A és B, *tetőpontok*nak neveztetnek. — A' körkör' idoma függ a' két tengelyek' hosszától, és a' góczok' hol-esésetől.

A' két góczok a' megfelelő tetőpontoktól egyenlő távolságra esnek. Mert

$$\begin{array}{rl} & EA = EB, \\ \text{kivonván:} & EF = Ef \\ \hline \text{lesz:} & AF = Bf. \end{array}$$

5. §.

A' körkör' bármelly G pontjának, a' két góczoktóli távolsága összevéve annyi, mint a' nagy tengely.

Ugyanis: a' körkör' adott fogalma szerint, bármelly rajta levő két pontok' góczoktóli távolságuk' összegei egyenlők; — ésígy ezen szabály alá esnek a' tetőpontok is. Ehhez képest:

$$GF + Gf = AF + Af = AF + AF + Ff.$$

azonban: $AF = BF$,

ésígy: $GF + Gf = AF + Ff + Bf = AB$;

ugyanezt lehet megmutatni minden többi pontokra nézve.

6. §.

A' körkör' ezen 3 elemei: a' nagy — és kis tengely, és a' góczok, nem mind önkényleşen felvehetők; hanem egy ezek közűl mindig a' másik kettő által feltételeztetik.

1) Ha a' nagy és kis tengelyek AB, CD kiadatnak: ezek által az F és f góczok' helye, vagy az EF és Ef vonalak' hossza, — melly a' körkör' *nyultságá*nak (excentricitas) neveztetik, — meg van határozva. Mert az FCE egyenesszögű háromszögben, a' CE mellékoldal $= \frac{1}{2}$ kistengely; $FC = AE = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2}$ nagy tengely. Már

$$\overline{FE}^2 = (CF)^2 - (CE)^2$$

vagy: $\overline{FE}^2 = (\frac{1}{2} AB)^2 - (\frac{1}{2} CD)^2$,

és: $FE = \sqrt{(\frac{1}{2}AB)^2 - (\frac{1}{2}CD)^2}$

azaz: *a' gócz' középponttóli távolsága, vagyis a' körkör' nyultsága, kijő, ha a' félnagytengely' és félkistengely' négylegeinek különbségéből négyleggyökér vonatik.*

2) Ha a' nagy tengely, és a' góczok' helyzete kiadatik: ez által a' kis tengely CD meg van határozva. T. i. az imént mondottak szerint:

$$\overline{CE}^2 = \overline{CF}^2 - \overline{FE}^2$$

$$\text{vagy } \overline{CE}^2 = \overline{\tfrac{1}{2}AB}^2 - \overline{FE}^2$$

$$\text{és: } CE^2 = \sqrt{\overline{\tfrac{1}{2}AB}^2 - \overline{FE}^2}$$

$$\text{vagy: } CD = 2\sqrt{\overline{\tfrac{1}{2}AB}^2 - \overline{FE}^2}. \text{ azaz: 'sat.}$$

3) Végre ha a' kis tengely, és a' góczok' helyzete kiadatik: ez által a' nagy tengely AB, meg lesz határozva. T. i.

$$\overline{FC}^2 = \overline{CE}^2 + \overline{FE}^2,$$

$$(\tfrac{1}{2}AB)^2 = (\tfrac{1}{2}CD)^2 + \overline{FE}^2,$$

$$\tfrac{1}{2}AB = \sqrt{(\tfrac{1}{2}CD)^2 + \overline{FE}^2},$$

$$AB = 2\sqrt{(\tfrac{1}{2}CD)^2 + \overline{FE}^2}.$$

Követ. A' körkör' szerkesztése végett tehát, ezen 3 elemek közül kettőnek kell kiadatni.

7. §.

A' kistengely' fele, középszeres egyik gócznak a' két tetőpontoktóli távolságai között.

Ugyanis, a' mondottak szerint:

$$\overline{CE}^2 = \overline{FC}^2 - \overline{FE}^2,$$

$$\text{vagy: } \overline{CE}^2 = \overline{AE}^2 - (AE - AF)^2,$$

$$\text{vagy: } \overline{CE}^2 = \overline{AE}^2 - \overline{AE}^2 + 2AE.AF - \overline{AF}^2,$$

$$\text{vagy: } \overline{CE}^2 = AB \,.\, AF - \overline{AF}^2,$$

$$\text{vagy: } \overline{CE}^2 = AF \,.\, (AB - AF),$$

vagy: $CE \,.\, CE = AF\,(AB - AF)$;

ezen egyenletet arányba tevén:

$AF : CE = CE : AB - AF$

vagy: $AF : CE = CE : BF$.

Ezt kellett megmutatni.

8. §.

A' nagy és kis tengelyhez harmad-arányos vonal, neveztetik *góczhúrnak* (parameter), 's p betüvel jelöltetik. Így tehát, ha nagy tengely $= a$, kistengely $= b$: lesz:

$$a : b = b : p,$$

$$\text{innen: } p = \frac{b^2}{a},$$

$$\text{és: } ap = b^2$$

Továbbá ha $AF = s$: úgy a' 7. §-ban lehozott arány így lesz:

$$s : \tfrac{1}{2}b = \tfrac{1}{2}b : a - s$$

$$\text{innen: } \tfrac{1}{4}b^2 = (a-s)\,.\,s$$

$$\text{vagy: } b^2 = 4\,(a-s)\,.\,s,$$

$$\text{úgyde: } b^2 = ap,$$

$$\text{éshígy: } ap = 4\,(a-s).\,s = 4as - 4s^2.$$

azaz: a' nagytengelynek góczhúrrali sokszorozmánya négyakkora, mint a' góczнak a' két tetőpontoktóli távolságainak sokszorozmánya.

Következ. Innen: $p = \dfrac{4(a-s)\,s}{a}$,

vagy: $p = \dfrac{4as - 4s^2}{a}$; hasonlólag:

$$ap = 4as - 4s^2$$

$$\frac{ap}{4} = as - s^2$$

9. §.

Minden függőleges vonal GH (id. 1.), melly a' körkör' bármelly pontjáról a' nagy tengelyre eresztetik, *rendszál*-nak (ordinata) neveztetik, — és a' nagy tengely' két részei, AH, BH, mellyekre a' rendszál által osztatik, *metszékek*nek (abscissa). Rövidség végett legyen a' *rendszál* = y, és a' metszék = x. Íd. 1.

Fentebb már láttuk, miként határozzák meg a' körkört a' két tengely és a' góczok; —'s következőleg ha kiadatnak azok, belölök a' körkört lehet szerkeszteni. Most már lássuk, hogy ha kiadatik a' két tengely, — 's azokból a' góczhúr kiszámittatik: miként lehet ezekből a' körkör' bármelly pontjának hová esését, vagy más szóval, a' körkör' bármelly pontjának megfelelő *rendszál'* hosszát kiszámítni.

10. §.

A' körkör' bármelly pontjának megfelelő rendszál' egyenlete imez:

$$y = \pm \sqrt{px - \frac{px^2}{a}},$$

azaz: a' rendszál (y) kijö, ha kiadatván a' két tengely, (a, b), azokból a' góczhúr (p) kikerestetik $\left(p = \frac{b^2}{a}\right)$, — ezzel bármelly felvett metszék' (x) négylege sokszoroztatik, ez a' nagy tengelylyel (a) elosztatik, ezen hányados, a' góczhúr' és metszék' sokszorozmányából kivonatik, és ezen maradékból négyleg-gyökér vonatik.

Ugyanis: legyenek:

$AH = x$	$GF = z$	$FH = x - s$
$HB = a - x$	$Gf = a - z$	$fH = a - x - s$

Már: a' GFH és GfH háromszögekben:

$$(o) \ldots\ldots \overline{GH}^2 = \overline{GF}^2 - \overline{FH}^2,$$

$$(v) \ldots\ldots \overline{GH}^2 = \overline{Gf}^2 - \overline{fH}^2.$$

vagy az elöbbi elnevezések szerint:

$$(o) \ldots\ldots y^2 = z^2 - x^2 + 2sx - s^2$$

$$(v) \ldots\ldots y^2 = \left\{ \begin{array}{c} a^2 - 2az + z^2 - a^2 + 2ax - x^2 \\ + 2as - 2xs - s^2; \end{array} \right\}$$

$$\text{innen:} \left\{ \begin{array}{l} z^2 - x^2 + 2sx - s^2 = \\ = a^2 - 2az + z^2 - a^2 + 2ax - x^2 + 2as \\ - 2xs - s^2. \end{array} \right\}$$

$$\text{innen: } z = \frac{2ax + 2as - 4xs}{2a}$$

$$z = \frac{ax + as - 2xs}{a}.$$

$$\text{és: } z^2 = \frac{a^2x^2 + a^2s^2 + 4x^2s^2 + 2a^2xs - 4ax^2s - 4axs^2}{a^2}$$

Már a' z^2 ezen értékét helyettesitsük a' fentebbi (o) egyenletben; és vegyük egy nevezőre:

$$y^2 = \left\{ \begin{array}{l} a^2x^2 + a^2s^2 + 4x^2s^2 + 2a^2xs - 4ax^2s - \\ 4axs^2 - a^2x^2 + 2a^2sx - a^2s^2 \end{array} \right\} : a^2$$

$$y^2 = \frac{4x^2s^2 + 4a^2sx - 4ax^2s - 4axs^2}{a^2},$$

$$y^2 = \frac{(4as - 4s^2) \cdot ax + (4as - 4s^2) \cdot - x^2}{a^2}$$

$$y^2 = \frac{(4as - 4s^2) \cdot (ax - x^2)}{a^2}$$

Azonban a' 8. §. szerint:

$$4as - 4s^2 = ap, \text{ ésígy:}$$

$$y^2 = \frac{ap \cdot (ax - x^2)}{a^2},$$

$$y^2 = \frac{a^2px - apx^2}{a^2} = \frac{apx - px^2}{a}$$

$$y^2 = px - \frac{px^2}{a}.$$

innen végre:

$$y = \pm \sqrt{px - \frac{px^2}{a}}.$$

Ezt kellett megmutatni.

A' jelen esetben vala $FH = x - s$. — Ha pedig a' GH, az F és A közt húzatik: akkor $FH = s - x$. De ez a' számitásban semmi változást nem szűl; — mert ezen kifejezet négyleg-be jő, — már pedig ott mindegy akár $(x-s)^2$, akár $(s-x)^2$, mindkettő $= x^2 - 2sx + s^2$.

A' gyökérjegy előtti kettős $(\pm)$ jegy azt jelenti, hogy minden metszéknek két rendszál felel meg, melylyeknek mennyiségök egyenlő, — de helyzetük, a' nagy tengelyhez képest, ellenkező, — egyik annak felette, másik alatta.

11. §.

A' nagy tengely' A és B két végpontjainál a' rendszál = o.

Ugyanis: az A-nál $x = o$, ésígy

$$y = \sqrt{p.o - \frac{p.o}{a}} = o.$$

Ellenben a' B-nél $x = a$, ésígy

$$y = \sqrt{pa - \frac{pa^2}{a}} = \sqrt{pa - pa} = o.$$

12. §.

Mivel (8. §. szerint) $ap = b^2$; és $ap = 4as - 4s^2$: ha ezen egyenletben: (10. §.):

$$y^2 = \frac{ap\,(ax - x^2)}{a^2}$$

az *ap*' ezen értékeit helyettesítjük: két új egyenletet nyerünk: u. m.

$$y^2 = \frac{b^2\,(ax - x^2)}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}\,.\,(ax - x^2) = \frac{b^2}{a^2}\,(a - x)\,.\,x.$$

$$\text{és: } y^2 = \frac{(4as - 4s^2)\,.\,(ax - x^2)}{a^2} = \frac{4as - 4s^2}{a^2}\,.\,(ax - x^2).$$

13. §.

Ha figyelemre veszünk több egyenes-szögű egyközényeket, mellyeknek kerítéseik egyenlők: azoknak udvar-tartalmuk, vagyis talp-vonaluknak magosság-vonalukkali sokszorozmányuk, annyival nagyobb lesz, minél kisebb a' különbség ezen két vonalak között; ellenben minél nagyobb köztök a' különbség, annál kisebb ama sokszorozmány. Innen azok közt, a' négy-leg' udvara legnagyobb. — Ha a' talp bárminő nagy is, de ha a' magosság $= o$: úgy az udvar $= o$. Minél inkább nö a' magosság, 's minél inkább közeledik annak mennyisége a' talpéhoz: annál inkább nö az udvar, vagyis ezeknek sokszorozmányuk. A' legnagyobb különbség' esetében tehát a' sokszorozmány $= o$; ésígy a' legkisebb különbség, vagyis az egyenlöség' esetében a' sokszorozmány legnagyobb. — Így ha valamelly számot két két részekre többféleképen szakgatunk, a' két két részek' sokszorozmánya annál nagyobb lesz, minél inkább közelitnek a' részek egymáshoz, — legnagyobb, ha a' részek egyenlök, p. o. 24-et ha elszakgatok részekre: $o + 24$, ezek' sokszorozmánya $o \times 24 = o$, továbbá $1 + 23$, ezekböl $1 \times 23 = 23$, és $2 + 22$, ezekböl $2 \times 22 = 44$, továbbá $8 + 16$ ezekböl $8 \times 16 = 128$, továbbá $12 + 12$, ezekböl $12 \times 12 = 144$.

Ebböl látnivaló, hogy midön a' nagy tengely két metszékre osztatik, x, és $a - x$; ezeknek sokszorozmányuk annál nagyobb, minél inkább közelítnek ezek egymáshoz; legnagyobb, ha egyenlök, t. i. ha $x = a - x$. E' szerint azon fentebbi (12. §.) egyenletben.

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a - x) x$$

az y^2, 's innen az y is annál nagyobb lesz, minél inkább közelítnek az egyenlöséghez ezen két sokszorozók, $a - x$ és x; — legnagyobb akkor, ha azok egyenlök. Azonban ha azok, t. i. a' nagy tengely' metszékei egyenlök: úgy egyik egyik annyi mint félnagy tengely,

$$x = a - x = \frac{1}{a}.$$

És ezen esetben:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}$$

vagy: $y^2 = \frac{b^2a^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4}$

és: $y = \frac{b}{2}$

azaz: ha a' metszékek egyenlők: úgy a' rendszál = fél-kistengely.

Követk. 1) A' rendszál nő: minél inkább nő a' metszék, a' tetőponttól, a' középpontig. Ott a' rendszál legnagyobb, 's = fél-kistengely; azontúl minél inkább nő a' metszék, annál inkább fogy a' rendszál, — míg a' másik tetőpontnál elenyészik.

Követk. 2) A' fél-kistengelytől kétfelől egyenlő távolságra eső két rendszálak egyenlők. Innen a' kistengely a' körkört két egyenlő részre osztja.

14. §.

Akármellyik góczba eresztett rendszál, annyi mint fél góczhúr.

Ugyanis ezen esetben: $x = s$,

és így: $y^2 = ps - \frac{ps^2}{a}$

úgyde: $p = \frac{4as - 4s^2}{a}$, (8. §.)

és így: $y^2 = \frac{4as^2 - 4s^3}{a} - \frac{4as^3 + 4s^4}{a^2}$,

vagy: $y^2 = \frac{4a^2s^2 - 4as^3 - 4as^3 + 4s^4}{a^2}$

$$y^2 = \frac{4a^2s^2 - 8as^3 + 4s^4}{a^2}$$

innen: $y = \sqrt{\frac{4a^2s^2 - 8as^3 + 4s^4}{a^2}}$

vagy: $y = \frac{2as - 2s^2}{a} = \frac{p}{2}$ (l. 8. §. köv.)

15. §.

A' góczuak, a' hozzá közelebb eső telőponttóli távolsága mindig nagyobb, mint a' góczhúr' egynegyedrésze; $s > \frac{p}{4}$.

Ugyanis: a' góczban

$$y^2 = ps - \frac{ps^2}{a}, \quad (14. §.)$$

Úgyde ugyan a' góczban:

$$y = \frac{p}{2}, \quad . \ . \ (14. §.)$$

ésígy: $y^2 = \frac{p^2}{4}$;

innen: $\frac{p^2}{4} = ps - \frac{ps^2}{a}$

mindkét részt elosztván p-vel:

$$\frac{p}{4} = s - \frac{s^2}{a}$$

Ésígy s nagyobb mint $\frac{p}{4}$, $\frac{s^2}{a}$-val.

16. §.

A' különböző nagyságú rendszálak' négylegei úgy vannak egymáshoz: mint az általok képzett metszékek' egymással sokszorozmányai.

Legyen egyik rendszál $= y$, másik $= u$. Az y által képzett metszékek: x és $a - x$; — az u által képzettek: t, és $a-t$. Illy arány áll:

$$y^2 : u^2 = px - \frac{px^2}{a} : pt - \frac{pt^2}{a},$$

az utolsó viszony' mindkét tagjait a-val sokszorozván:

$$y^2 : u^2 = apx - \frac{apx^2}{a} : apt - \frac{apt^2}{a},$$

vagy: $y^2 : u^2 = apx - px^2 : apt - pt^2$;

ismét ugyanazokat elosztván p-vel:

$$y^2 : u^2 = ax - x^2 : at - t^2$$

vagy: $y^2 : u^2 = x(a-x) : t(a-t)$.

Ezt kellett megmutatni.

Ugyanezt a' tértanban, a' kört illetőleg is megmutattuk.

17. §

A' rendszál' négylege az illető metszékek' sokszorozmányához úgy van: mint a' kis tengely' négylege, a' nagy tengely' négylegéhez; t. i.:

$$y^2 : ax - x^2 = b^2 : a^2.$$

Ugyanis:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(ax - x^2), \text{ (12. §.)}$$

innen: $a^2y^2 = b^2.(ax - x^2)$;

ezen egyenletből arányt csinálván:

$$y^2 : ax - x^2 = b^2 : a^2.$$

Ezt kellett megmutatni.

18. §.

Ha a' kis tengelyre húzatik rendszál, p. o. Gh: ennek négylege, az itteni két metszékek', Ch, és hD sokszorozmányához úgy van, mint a' nagy tengely' négylege a' kis tengelyéhez; t. i.

$$\overline{Gh}^2 : Ch \times hD = a^2 : b^2$$

Ugyanis: $Gh = HE = \frac{a}{2} \quad x,$

ésígy: $\overline{Gh}^2 = \frac{a^2}{4} - ax + x^2;$

továbbá: $Eh = GH = y;$

ésígy: $Ch = \frac{b}{2} - y,$

és: $Dh = \frac{b}{2} + y;$

következik: $Ch \times Dh = \frac{b^2}{4} - y^2.$

Azonban meg lehet mutatni, hogy helyes ezen arány:

$$\frac{a^2}{4} - ax + x^2 : \frac{b^2}{4} - y^2 = a^2 : b^2,$$

mert a' szélső tagok' sokszorozmánya egyenlő a' belső tagok' sokszorozmányával, t. i.

$$\frac{a^2b^2}{4} = \frac{a^2b^2}{4},$$

és: $b^2 (ax - x^2) = a^2y^2$, (17. §.)

a' feltett arány pedig másként így van:

$$\overline{Gh}^2 : Ch \times hD = a^2 : b^2.$$

19. §.

Valamint a' 8-dik §-ban, azon esetre, ha a' nagy tengelyen vétetnek a' metszékek, *góczhúrnak* $= p$ neveztük azon vonalat, melly a' nagy- és kis-tengelyhez harmad-arányos, t. i.:

$$a : b = b : p:$$

épen úgy, ha a' metszékeket a' kis-tengelyen vesszük, (vagy ezt tesszük *metszék-vonalnak*), ezen esetben kis-tengelyi góczhúr $= P$ lesz azon vonal, melly a' kis- és nagy-tengelyhez harmad-arányos, t. i.:

$$b : a = a : P.$$

Ha itt a' kis-tengely $= b$, a' góczhúr $= P$, a' metszék $= X$, a' rendszál $= Y$: tehát lesz:

$$Y^2 = PX - \frac{PX^2}{b}.$$

Mert a' 17. §. szerint:

$$Y^2 : bX - X^2 = a^2 : b^2, \text{ — következőleg:}$$

$$Y^2 = \frac{a^2bX - a^2X^2}{b^2} = \frac{a^2}{b} : \frac{bX - X^2}{b}.$$

Azonban $\frac{a^2}{b} =$ a' kis tengely' góczhúrja $= P$:

tehát $= Y^2 = P . \frac{Xb - X^2}{b} = PX - \frac{PX^2}{b}.$

Látnivaló tehát, hogy mind azon egyenletek, mellyek fentebb a' nagy tengelyre nézve kifejtettek, a' kis tengelyt illetőleg is állanak; kivevén azokat, mellyekben a' góczok jönek elö, — mivel ezek a' kis-tengelyen nincsenek.

20. §.

Fentebb mondatott, mi adatok kivántatnak a' körkör' szerkesztésére. Most adjuk hozzá: hogy arra nézve elég annyi is, ha csak egyik tengely, és a' góczhúr kiadatik, — mert ez utóbbi a' két tengelyhez harmadarányos. T. i. ha kiadatik valamellyik tengely (a, b,) és a' góczhúr (p): mivel: $a : b = b : p$, tehát $b^2 = ap$, 's innen $b = \sqrt{ap}$; — és $a = \frac{b^2}{p}$; — így egyik tengelyből és a' góczhúrból a' másik tengelyt kikereshetjük.

21. §.

„Feladat.“ Adatván a' körkör' valamelly pontja, E, (id. 2.): arra érintőt húzni. Id. 2.

Megfejt. A' húzandó vonalnak ollyannak kell lennie, mellynek a' körkörrel csupán egy közös pontja legyen, az E, — minden más pontjai a' körkörön kivül essenek. — Erre nézve húzzunk az E pontból, a' két góczokba, EF, Ef vonalakat, — ez utóbbit folytassuk, 's legyen EG = EF, — húzzuk a' GF-et, osszuk ezt két egyenlö részre a' H-nál, 's a' H ponton keresztül húzzunk függönyt, IK, ez lesz a' kivánt érintő; — mert 1) a' körkör' E pontja az IK vonalnak is pontja; 2) az IK vonal' bármelly más pontja, p. o. L, a' körkörön kivül esik. Ugyanis:

1) *az elsöt illetőleg:* △ FEG, mellynek telőpontja E, egyenszáru; — ennek talpa' közepén függőlegesen megy az IK: ésígy IK a' háromszög' telőpontján az

E-n megy keresztül; — tehát az E közös pontja a' körkörnek, és az IK vonalnak.

2) *A' másodikat illetőleg*: ha az IK vonal' L pontja a' körkörön esnék: úgy LF + Lf egyenlő tartoznék lenni EF + Ef-el; — vagy, mivel LF = LG (△FLG egyenszárú levén), és EF=EG, tehát: Lf+LG egyenlő tartoznék lenni Ef + EG-vel; ez pedig nem lehető, mert a' GLf △' két oldalának összege a' 3-dik oldallal egyenlő nem lehet. Ésígy látnivaló, hogy az L pont a' körkörön nem eshetik.

Tehát az IK vonal' bármelly más pontja az E-n kivül, a' körkörrel nem közös; — tehát IK a' körkörre érintő.

22. §.

Azon szögletek, mellyeket az érintés' pontjára a' góczokból húzott vonalak, az érintővel képeznek, egyenlők, t. i. $<IEF = <KEf$. (id. 2.)

Ugyanis: $<IEF = <HEG$, mert egyenszáru háromszög' tetőszöglete, függöny által van két részre osztva. — Úgyde $<HEG = <KEf$, mert csúcsszögletek. Ésígy: $<IEF = <KEf$.

Jegyz. A' lát- és hangtanban (*optica*, és *acustica*) megmutattatik, hogy a' fény- és hangsugarak' a' minő szöglet alatt esnek valamelly test' felületére, ugyanollyan alatt pattannak arról vissza. — E' szerint ha valamelly körkörösön bezárt térben, egyik góczban valamelly fénylő vagy hangadó test van, 's arról a' körkörös falra fény- vagy hangsugarak mennek: mindezen sugarak a' másik góczba verődnek vissza. E' szerint két személyek, kik egy illyen térben, egyik egyik góczban, másik másikban állnak, beszélhetnek egymással, a' nélkül, hogy más meghallaná beszédüket.

23. §.

A' tengelyről az érintőre, az érintés' póntjánál húzható függöny EM (id. 2.), az érintés' pontjából a' góczokba húzható vonalak által képzett FEf szögletet két egyenlő részre osztja.

Ugyanis:

$$< MEI = < MEK, \text{ egyenesek,}$$

úgyde: $< FEI = < fEK$, (22. §.)

egyenlökből egyenlők vétetvén el, egyenlők maradnak:

$$< MEI - < FEI = MEK - < fEK,$$

vagy: $< MEF = < MEf$.

24. §.

Ha az érintés-pontból E (id. 3.) a' nagy tengelyre, nemcsak függöny EH, hanem *rendszál* is EG húzatik; és a' nagy tengely mindaddig nyujtatik, mig az erintővel, az I-ben, össze nem ér: az EH' *függő* vonalnak (linea normalis), — a' GH *alfüggőnek* (subnormalis), és a' GI *alérintőnek* (subtangens) neveztetik. id. 3.

25. §.

„*Feladat.*" *Az alfüggő' (GH) értekének egyenletét megtalálni.*

Megf. Mivel az FEf háromszögben, az EH *függő* az E szögletet két egyenlő részre osztja: tehát:

$$Ef : EF = Hf : HF,$$

és: $EF + Ef : EF = HF + Hf : HF$.

Azonban: $EF + Ef = a$,

$$\text{és}: HF + Hf = a - 2s;$$

nevezzük EF-et, mint fentebb, z-nek:

lesz: $a : z = a - 2s : HF$;

$$\text{innen}: HF = \frac{(a-2s) \cdot z}{a}.$$

Már fentebb (10. §.) a' z-nek ezen értéke fejtetett ki:

$$z = \frac{ax + as - 2sx}{a};$$

ezt az előbbi egyenletben helyettesítvén:

$$\text{lesz}: HF = \frac{a^2x + a^2s - 2asx - 2asx - 2as^2 + 4s^2x}{a^2}$$

$$\text{vagy}: HF = \frac{a^2x + a^2s - 4asx - 2as^2 + 4s^2x}{a^2}.$$

Azonban az alfüggő $GH = HF - FG$, — és $FG = x - s$; innen az alfüggő

$$GH = HF - x + s.$$

Már ha a' HF' imént talált értékét ezen egyenletben helyettesitjük:

$$GH = \frac{a^2x + a^2s - 4asx - 2as^2 + 4s^2x}{a^2} - x + s.$$

$$GH = \frac{a^2x + a^2s - 4asx - 2as^2 + 4s^2x - a^2x + a^2s}{a^2}$$

$$GH = \frac{2a^2s - 4asx - 2as^2 + 4s^2x}{a^2}$$

$$GH = \frac{(2a - 4x)as - (2a - 4x)s^2}{a^2}$$

$$GH = \frac{(as - s^2)(2a - 4x)}{a^2}$$

$$GH = \frac{as - s^2}{a} \cdot \frac{2a - 4x}{a}$$

Azonban 8. §. *követk.* szerint:

$$as - s^2 = \frac{ap}{4}$$

innen: $$\frac{as - s^2}{a} = \frac{ap}{4a} = \frac{p}{4}.$$

E' szerint az előbbi egyenlet így lesz:

$$GH = \frac{p}{4} \cdot \frac{2a - 4x}{a} = \frac{2ap - 4px}{4a}$$

$$GH = \frac{ap - 2px}{2a}$$

végre:

$$GH = p \cdot \frac{a - 2x}{2a};$$

azaz: *ha a' metszék' kettőzete a' nagy tengelyből kivonatik, — ezen maradék a' nagy tengely' kettőzetével elosztatik, — 's a' hányados a' góczhúrral sokszoroztatik: kijő az alfüggő.*

26. §.

„*Feladat*" *Az alérintő' GI értekének egyenletét megtalálni.* (id. 3.) Id. 3.

Megf. Az IEH egyenes-szögü háromszögben, az EG = rendszál = y, a' feszes-oldalra függőleges, 's így közép-arányos az alfüggő (GH), és alérintő (GI) között; miszerint:

$$GI : y = y : GH, \text{ vagy}$$

$$GI : y = y : \frac{ap - 2px}{2a}$$

innen: $GI = y^2 : \frac{ap - 2px}{2a}$,

vagy: $GI = \frac{y^2 2a}{ap - 2px}$.

Ha ezen egyenletben helyettesítjük az y^2 ezen értekét: (10. §.)

$$y^2 = \frac{apx - px^2}{a}:$$

lesz: $GI = \frac{2a^2px - 2apx^2}{a^2p - 2apx} = \frac{2ax - 2x^2}{a - 2x}$,

elosztván 2-vel mind nevezőt, mind számlálót:

lesz: $GI = [(a-x)x] : (\frac{1}{2}a - x)$;

azaz: *az alérintő kijő, ha a' két metszékek' sokszorozmánya, a' fél nagy tengely- és a' metszék közötti különbséggel elosztatik.*

27. §.

Id. 3. Minden egyenes vonal EL, melly a' körkör' bármelly pontjáról, E, a' Q középponton keresztül húzatik, neveztetik a' körkör' *átmérőjének* (diameter); annak két végpontjai, E és L, *tetőpontoknak*. Ha az egyik tetőpontnál, p. E-nél, érintő húzatik; minden ezzel egyközüleg, a' körkörről az átmérőre húzható vonal NM, az *átmérő' rendszálának* neveztetik; az átmérőnek ez által vágott részei pedig, *átmérő' metszékeinek*. – Továbbá ha az említett érintővel egyközüleg, még egy másik átmérő húzatik OP: ezen két átmérők egymáshoz képest *páros átmérőknek* (diametri conjugatae) neveztetnek. A' két páros átmérőkhöz harmadarányos vonal itt is *góczhúr* (parameter) nevet visel.

Ha a' páros átmérők közül egyik $=$ a, másik $=$ b, — a' rendszál $=$ y, — a' metszék $=$ x, — a' góczhúr $=$ p : itt is épen azon egyenletek állnak, mellyeket a' tengelyekre nézve kifejtettünk.

28. §.

Az eddig mondottakban, a' metszék' kezdő pontját mindig a' tetőpontnál vettük ; — de vehetni azt a' körkör' középpontjából is. Ha a' középponttól a' rendszálig eső vonalat nevezzük e' szerint metszéknek, 's ezt u-val jeleljük : úgy az eddigi $x = \frac{1}{2} a - u$, vagy $= \frac{1}{2} a + u$, a' szerint, a' mint az *u* metszék a' középponton innen, vagy túl esik. — Ha tehát az eddigi egyenletekben az x helyett, $\frac{1}{2}$ a $\pm$ u tétetik : olly egyenleteket nyerünk, mellyek által a' középponttól számított metszékekhez képest számíttatik a' többi vonalak' értéke is. Így p. o. ezen fentebbi egyenlet (12. §.)

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (ax - x^2)$$

ezen esetben így lesz:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} \left(\frac{a^2}{4} - u^2 \right). \text{ 'sat.}$$

29. §.

A' kör és körkör hasonlítnak ugyan egymáshoz, 's a' körkört *nyúlt körnek* is szokták nevezni : de ha ezeket egymással összehasonlítjuk, következő különbségek tűnnek elő :

1) A' körben csak egy tengely van, t. i. az átmérő: ellenben a' körkörben két tengely, és végetlen sok különböző átmérő van.

2) A' körkörnél $p = \frac{b^2}{a}$. A' körnél pedig, mivel

$b = a$, — tehát $p = \frac{a^2}{a} = a$; — azaz a' góczhúr a' nagy tengelylyel, vagyis itt az átmérővel egyenlő.

3) A' körkörnél (6. §. szerint) a' nyultság (excentricitas) annyi, mint a' két féltengely' négylegeik' különbsége. — A' körnél a' két féltengelyek egyenlők, — ésígy négylegeik közt sincs különbség, — ésígy a' nyúltság $= o$, — 's a' góczok a' középponttal öszszeesnek.

4) A' körkört a' két góczokból, két vonalak' segitségével lehet szerkeszteni. Ellenben a' kört egyetlenegy vonal, t. i. a' sugár által lehet írni.

5) A' 10. §-ban illy egyenlet áll:

$$y^2 = \frac{ap\,(ax - x^2)}{aa},$$

$$\text{vagy: } y^2 = \frac{p}{a} \cdot (ax - x^2).$$

Már mivel a körben $p = a$, ésígy $\frac{p}{a} = 1$:

innen:

$$y^2 = ax - x^2 = (a - x) \,.\, x;$$

innen: $a - x : y = y : x$,

azaz a' rendszár a' két metszékek között középszeres, — mint ezt a' tértanban is tanultuk.

6) Ha valamelly körkör' nagy tengelye, valamelly

kör' átmérőjével egyenlő, — 's mindkettőben egyenlő metszékeket csinálunk: ekkor a' körbeni rendszál a' körkörbeni rendszálhoz olly viszonyban lesz, mint a' nagy tengely a' kis tengelyhez. — Mert legyen a' körkörbeni rendszál $= y'$, a' körbeni $= y$: tehát lesz:

$$\overline{y'}^2 = ax - x^2$$

$$\text{és: } y^2 = \frac{b^2}{a^2}(ax - x^2).$$

$$\text{tehát: } \overline{y'}^2 : y^2 = ax - x^2 : \frac{b^2}{a^2} \cdot (ax - x^2).$$

Ha az utóbbi viszony elosztatik $ax - x^2$-val: lesz:

$$\overline{y'}^2 : y^2 = 1 : \frac{b^2}{a^2}$$

$$\text{vagy: } \overline{y'}^2 : y^2 = a^2 : b^2$$

$$\text{és: } y' : y = a : b.$$

7) Ha ez előbbi esetben a' közös (x) metszék' rendszálaihoz, MI és MG-hez (id. 4). érintők HL és HK húzatnak: a' kör' és körkör' alérintője ugyanaz lesz $=$ HM. Mert (26. §.) az alérintő' értéke $= \frac{2ax - 2x^2}{a - 2x.}$ Id. 4.

Mivel már az ezen képletben levő a, és x a' körben és körkörben egyenlők: látnivaló, hogy az alérintők is egyenlők.

30. §.

„Feladat.“ A' körkör' udvar-területét megtalálni.

Megf. Irjunk egy körkört (id. 4.), 's körülte egy kört, mellynek átmérője AB, a' körkör' nagytengelyével egyenlő legyen. Már képzeljük az AB átmérőt végetlen sok, 's végetlen apró részekre felosztatni, — 's mindezen osztály-pontokon függőleges vonalakat egy- Id. 4.

mással egyközűleg húzatni az AB–re, mellyek a' kör' körületéig nyuljanak. Ezeknél fogva úgy képzelhetjük, hogy mind a' kör', mind a' körkör' udvara végetlen kicsiny, de egyenlő magosságu egyközényekre osztatik. P. o. legyenek FDEC és FDec egyközények, egyik a' kör', másik a' körkör' udvarában, mellyeknek magosságuk az FD, — 's képzeljünk ugyanillyen magosságu számtalan egyközényeket; — ezen egyközények' öszszegei teszik a' kör' és körkör' udvarterületét. Már mivel ezen egyközények' magosságai egyenlők: tehát udvaraik úgy vannak egymáshoz, mint különböző talpvonalaik, DC, Dc 'sat. Innen a' körbeni egyközények' udvarainak összege, vagyis a' kör' egész udvara, — úgy van a' körkörbeni egyközények' udvarainak összegéhez, vagyis a' körkör' udvarához: mint a' körbeni talpvonalak' összege a' körkörbeni talpvonalak' összegéhez. Ezen talpvonalak pedig mind a' körben, mind a' körkörben a' *rendszálak*; és azok (29. §. 6-szám szerint) úgy vannak egymáshoz, mint a' nagy tengely, (vagyis itt, a' kör' átmérője), a' kis tengelyhez. — Már tudjuk a' tértanból, hogy a' kör' udvarterülete — ha a' körület $=$ P, és az átmérő, vagy nagytengely $=$ a —, lesz $= \frac{aP}{4}$. E' szerint

$$\frac{aP}{4} : \textit{körkör' udv.} = a : b .$$

$$\text{innen a' } \textit{körkör' udvara} = \frac{Pab}{4a} = P \times \tfrac{1}{4} b;$$

azaz: *a' körkör' udvara kijő, ha a' nagytengelylyel, mint körátmérővel írható körület, a' kistengely' negyedrészével sokszoroztatik.*

31. §.

Ha felveszünk két kör' körületét P, és P', mellyek közül amannak átmérője a' nagy-, ennek a' kis tengely egy körkörből: azon két körkörületek úgy vannak egymáshoz, mint illető átmérőik:

$$P : P' = a : b,$$

$$\text{innen: } Pb = P'a, \text{ innen: } \frac{Pb}{4} = \frac{P'a}{4}.$$

Innen látnivaló, hogy *a' körkör' udvara úgy is kijő, ha a' nagy-tengely' negyedrészével sokszoroztatik egy ollyan kör' körülete, mellynek átmérője a' kis-tengely.*

Továbbá $\frac{Pa}{4}$ és $\frac{P'b}{4}$, ollyan körök' udvarait fejezik ki, mellyek közül egyiknek átmérője a' nagy-, másiknak a' kistengely. Ezek közt középarányos

$$= \sqrt{\frac{P\,aP'b}{16}}.$$

Úgyde: $Pb = P'a$

$$\text{innen: } PaP'b = P^2b^2 = \overline{P,a}^2. \text{ Innen:}$$

$$\sqrt{\frac{PaP'b}{16}} = \sqrt{\frac{P^2b^2}{16}} = \sqrt{\frac{\overline{P'}^2a^2}{16}}$$

$$= \frac{Pb}{4} = \frac{P'a}{4}.$$

Innen nyilván van, hogy *a' körkör' udvara középarányos azon két körök' udvarai közt, mellyek közül egyiknek átmérője a' nagy-tengely, másiké a' kis-tengely.*

32. §.

Ha két körköröknél egyiknek udvarterülete E, másiké e, — nagy-tengelyük A, a, — kis-tengelyük B, b, — a' nagy tengelyeikkel irható kör-körületek P, P': tehát lesz:

$$E : e = \frac{PB}{4} . \frac{P'b}{4};$$

innen: $ePB = EP'b$;

továbbá: $P : P' : A : a$; innen $AP' = aP$;

ezen két egyenletet: $\left\{ \begin{array}{l} ePB = EP'b \\ AP' = aP \end{array} \right.$

sokszorozván: $ePBAP' = EP'baP$;

innen: $Eba = eBA$.

Következőleg: $E : e = AB : ab$;

azaz: *két körkörök' udvarai úgy vannak egymáshoz, mint saját két tengelyeik' sokszorozmányai.*

Ha ezen két körkörök hasonlók, azaz, ha tengelyeik arányosok, t. i.

$$A : a = B : b,$$

's innen: $aB = Ab$: akkor

ezen két egyenletet: $Eba = eBA$

és: $aB = Ab$

egymással sokszorozván, lesz:

$$Eba^2B = eBA^2b$$

vagy: $Ea^2 = eA^2$

Innen: $E : e = A^2 : a^2$;

azaz: *a' hasonló körkörök' udvarai úgy vannak egymáshoz, mint egynevű tengelyeik' négylegei.*

33. §.

Nyúlt-gömb, *) vagy *körkörtömeg* (ellipsois) olly rendes test, melly a' körkörnek, valamellyik tengelye körüli megfordulása által származik.

„*Feladat.*" *A' nyúlt-gömb' tömegtartalmát megtalálni.*

Megf. Ismét, mint a' 30. §-ban, képzeljünk egy körkör körül kört íratni, — 's ezek' udvarát végetlen sok egyközényekre osztatni. Ha ekkor a' körkör a' maga tengelyét körülfordulja, ezen végetlen sok egyközények, végetlen sok hengereket szülnek, mellyeknek végetlen kicsiny egyenlő magosságaik, de különböző körterület-fenekeik lesznek. — Már a' gömb' tömegében levő illyetén hengerek' összege (vagyis maga a' gömb' tömege), úgy van a' nyúlt gömbben levő hengerek' összegéhez, (vagyis a' nyúlt gömb tömegéhez): mint az elöbbi hengerek' fenekeinek összege, az utóbbiak' fenekeinek összegéhez. — Mivel pedig a' körterületek úgy vannak egymáshoz, mint az illető átmérök' négylegei,—melly átmérök itt a' kör' és a' körkör' rendszálai: tehát úgy van a' gömb' tömege (S), a' nyúlt-gömb' tömegéhez (E): mint $\overline{y'}^2 : y^2$.

Azonban mivel: $\overline{y'}^2 : y^2 = a^2 : b^2$,

tehát: $s : E = a^2 : b^2$.

Ha a' kör' és körkör' részeinek fentebbi elnevezéseit megtartjuk; mivel a' tértani szabályok szerint, a' gömb' tömege $= \frac{Pa^2}{6}$, tehát:

---

*) *Jegyz.* Valjon nem épen ezen testidomot nevezte-e a' magyar *gömböcz*-nek? mivel a' gömbhöz hasonlít, — mint gyerköcz, vadócz, uracs, ujoncz 'sat.

$$\frac{Pa^2}{6} : E = a^2 : b^2,$$

$$\text{innen: } E = \frac{Pa^2b^2}{6a^2} = \frac{Pb^2}{6} = P.\frac{b^2}{6};$$

azaz: *a' nyúltgömb' tömege kijő, ha a' nagytengelylyel, mint átmérővel irható körület, a' kistengely' négylegének hatodrészével sokszoroztatik.*

34. §.

Ha P és P′ a' fentebbi jelentésben vétetnek: lesz: $Pb = P'a$. — Ha tehát ezen egyenletben:

$$E = \frac{Pb^2}{6} = \frac{Pbb}{6},$$

a' Pb helyett P′a tétetik: lesz:

$$E = \frac{P'ab}{6}$$

$$\text{vagy: } E = \frac{2abP'}{12} = \frac{2a}{3} \times \frac{bP'}{4};$$

azaz: *a' nyúltgömb' tömege kijő, ha a' kis-tengely — mint átmérővel irható körterület, a' nagytengely' kétharmad részével sokszoroztatik.*

35. §.

Ha az A, B, P, E, a, b, P′, e, betük a' 32. §-bani jelentéseiket megtartják: lesz:

$$E : e = \frac{PB^2}{6} : \frac{P'b^2}{6},$$

$$\text{innen: } \frac{EP'b^2}{6} = \frac{ePB^2}{6}.$$

Azonban: $aP = AP'$

ésígy: $\frac{EP\,b^2aP}{6} = \frac{ePB^2AP'}{6}$,

innen: $\frac{Eb^2a}{6} = \frac{eB^2A}{6}$

és: $Eb^2a = eB^2A$

innen: $E : e = AB^2 : ab^2$;

azaz: *két nyúltgömbök' tömegei úgy vannak egymáshoz, mint mindenikben a' nagytengelynek, a' kis tengely' négylegéveli sokszorozmányok.*

A' hasonló nyúltgömböknél:

$A : a = B : b$, innen: $aB = Ab$

sokszorozzuk ezen két egyenletet:

$Eb^2a = eB^2A$

$Ab = aB$

egymással, 's lesz:

$Eb^3aA = eB^3aA$,

vagy: $Eb^3 = eB^3$,

innen: $E : e = B^3 : b^3. = A^3 : a^3$;

azaz: *a' hasonló nyúltgömbök' tömegei úgy vannak egymáshoz, mint az egynevű tengelyeik' koczka-hatványai.*

MÁSODIK CZIKKELY.

A' mentelékről (hyperbola.)

36. §

A' *mentelék* olly be nem zárt, határozatlan hosszaságú görbe vonal LAM (id. 5.), mellynek jelleme az, Id. 5.

hogy bármelly G pontjáról, ha saját góczába F, és a' megfelelő mentelék' góczába f (lásd 1. §.), egyenes vonalak GF és Gf húzatnak (mellyek *vezérsugaraknak*, radii vectores, neveztetnek), ezen két vonalak közötti különbség mindig annyi, mint a' két megfelelő mentelélek' egymástóli távolsága, t. i. Gf — GF = AB.

Az AB vonal neveztetik *nagy tengelynek*, — az E *középpont*, — az A és B, *tetőpontok*, — az F és f, *góczok*. — Mint a' körkörnek, úgy a' menteléknek is két gócza van; de azok itt nem, mint ott, a' nagy tengelyen, hanem annak folytatásán esnek; — és a' mentelék' külön pontjai is, mint a' körköré, a' góczokból reájok húzható vonalak által határoztatnak meg, — azon különbséggel, hogy amott azoknak összege, itt különbsége egyenlő a' nagy-tengelylyel. — Kiadatván tehát a' nagy tengely AB, és a' góczok F, f: ezekből lehet a' menteléket szerkeszteni.

37. §.

Azon vonal CD, melly az E középpontnál a' nagy tengelyre függőlegesen áll, 's mellynek hossza kétfelől a' C és D-nél az AC = AD vonalak által határoztatik, mellyek pedig az FE = fE vonalakkal egyenlők, neveztetik *kis-tengelynek*, — vagy az AB *első-*, a' CD *másod*-tengelynek, — 's itt is, mint a' körkörnél, *b*-vel jelöltethetik.

38. §.

Legyen, mint a' körkörnél, a' nagy tengely AB = a, — a' gócz' tetőponttóli távola FA és fB = s: lesz $AC = \frac{1}{2}a + s$;

innen: $$\frac{b^2}{4} = (\tfrac{a}{2} + s)^2 - \frac{a^2}{4},$$

vagy: $$\frac{b^2}{4} = \frac{a^2}{4} + as + s^2 - \frac{a^2}{4},$$

vagy: $$\frac{b^2}{4} = as + s^2;$$

innen: $b^2 = 4(as + s^2) = 4(a + s)s$.

Már mivel az $a + s$, és s kifejezetek a' góczoknak a' tetőpontoktóli távolságát jelentik: tehát ezen egyenlet:

$$b = \sqrt{4(a + s)s}$$

azt jelenti, hogy: *a' másod-tengely annyi, mint egyik gócznak, mind a' két tetőpontoktóli távolságaiból eredt sokszorozmány' négyzetének négyleggyökerc.*

Ezen egyenletből pedig:

$$\frac{b^2}{4} = (a + s)\,s,$$

vagy: $$\frac{b}{2} \cdot \frac{b}{2} = (a + s)\,s,$$

következik hogy:

$$a + s : \frac{b}{2} = \frac{b}{2} : s;$$

azaz: *a' másod-tengely' fele, középarányos egyik gócznak mind a' két tetőpontoktóli távolságai között.*

39. §.

Mint a' körkörnél, úgy itt is, a' két tengelyekhez harmadarányos vonal neveztetik *góczhúr*nak (parameter), t. i.

$$a : b = b : p$$

$$\text{tehát: } p = \frac{b^2}{a},$$

$$\text{és: } ap = b^2.$$

$$\text{Azonban: } b^2 = 4(a+s)\,s.$$

$$\text{ésigy: } ap = 4(a+s)\,s;$$

azaz: *a' nagy tengely' és góczhúr' sokszorozmánya annyi, mint egyik gócznak mind a' két tetőponttóli távolsága' sokszorozmányának négyzete.*

$$\text{Innen: } p = \frac{4as + 4s^2}{a}.$$

40. §.

A' menteléknél is azon vonal GH, melly annak valamelly G pontjáról, a' folytatott nagy-tengelyre függőlegesen húzatik, *rendszál*nak (ordinata), — és annak tetőpontoktóli távolságai, AH és BH, ehhez tartozó *metszékek*nek (abscissa) neveztetnek. — Ha az egyik metszék AH lesz $= x$: úgy $BH = a + x$.

Ha az ember a' folytatott nagy tengely' minden pontjait illető *rendszál'* hosszát kiszámitná: az által a' menteléket szerkeszteni lehetne. *Annak kiszámitására pedig* (a' rendszál itt is $= y$ levén) *imez egyenlet áll*:

$$y^2 = px + \frac{px^2}{a}$$

$$\text{vagy: } y = \pm\sqrt{px + \frac{px^2}{a}}:$$

azaz: *kikeresvén előbb a' góczhúrt, azzal az illető metszék' négylege sokszoroztatik, a' nagytengelylyel elosztatik, 's a' hányados a' metszék- és góczhúrbóli sok-*

szorozmányhoz adatik, végre ezen összegből négyleg-gyökér vonatik, — 's nyerjük a' rendszálat.

A' feltett egyenlet így hozatik le:

Legyen: $GF = z$,	$FH = x - s$,
's így lesz: $Gf = a + z$,	$fH = fB + AB + AH$,
	vagy: $fH = s + a + x$.

Már: $\overline{GH}^2 = \overline{GF}^2 - \overline{HF}^2$,

vagy: $y^2 = z^2 - x^2 + 2sx - s^2 \ldots\ldots (o)$

hasonlóul: $\overline{GH}^2 = \overline{Gf}^2 - \overline{fH}^2$,

vagy: $y^2 = a^2 + 2az + z^2 - s^2 - 2sa - a^2 - 2sx - 2ax - x^2 \ldots\ldots (v)$

Az (o) és (v) egyenletek' utó-részét összetevén:

$$z^2 - x^2 + 2sx - s^2 = a^2 + 2az + z^2 - s^2 - 2sa - a^2 - 2sx - 2ax - x^2$$

innen:

$$z = \frac{2sx + as + ax}{a}$$

és: $$z^2 = \frac{4s^2x^2 + 4s^2ax + s^2a^2 + 4asx^2 + 2sa^2x + a^2x^2}{a^2}.$$

Már ha a' z^2 ezen értéke, az (o) egyenletben helyettesíttetik, 's minden tagok egy nevezőre vonatnak, lesz:

$$y^2 = \left\{\begin{matrix} 4s^2x^2 + 4s^2ax + s^2a^2 + 4asx^2 + \\ 2sa^2x + a^2x^2 - a^2x^2 + 2sxa^2 - \\ s^2a^2 \end{matrix}\right\} : a^2.$$

$$y^2 = \frac{4sa^2x + 4s^2ax + 4asx^2 + 4s^2x^2}{a^2}$$

$$y^2 = \frac{(4as + 4s^2)ax + (4as + 4s^2)x^2}{a^2}$$

$$y^2 = \frac{(4as + 4s^2)(ax + x^2)}{a^2}.$$

Azonban (39. §.): $4as + 4s^2 = ap$,

innen: $y^2 = \frac{ap \cdot (ax + x^2)}{a^2} = \frac{a^2px + apx^2}{a^2}$

és: $y^2 = px + \frac{px^2}{a} = \frac{p}{a} \cdot (ax + x^2)$,

végre: $y = \pm \sqrt{px + \frac{px^2}{a}} = \sqrt{\frac{p}{a} \cdot (ax + x^2)}$;

melly képletben a' kettős ($\pm$) jegyek azt jelentik, hogy minden x metszékre nézve két rendszál van, mellyek' hossza egyenlő, de fekvésök a' folytatott nagytengelyre nézve ellenkező. 'S innen azt is láthatni, hogy a' folytatott nagytengely a' mentelék' síkját felezi.

Szembetünő itt, mennyire hasonlítnak egymáshoz a' körkör és a' mentelék; midőn ezen egyenlet és az ottani megfelelő között csupán egy jegy ($- +$) különbség van.

Itt feltétetett, hogy a' GH a' góczon túl esik, 's azért $FH = x - s$; — ha pedig a' GH a' gócz és tetőpont közt esnék: akkor FH lenne $= s - x$. De ezen különbség az egyenlet' lehozásában semmi változást nem szül; mint ugyanezt a' körkörnél megmutattuk.

41. §.

A' 40. §-ban vala:

$$y^2 = \frac{p}{a}(ax + x^2) = \frac{ap}{a^2} \cdot (ax + x^2);$$

a' 39. §-ban pedig vala:

$$ap = b^2, \text{ és: } ap = 4as + 4s^2.$$

Ha az *ap* ezen két értékeit itt helyettesítjük: még a' mentelékre nézve két egyenletet nyerünk: u. m.:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(ax + x^2) = \frac{b^2}{a}\left(x + \frac{x^2}{a}\right);$$

$$\text{és: } y^2 = \frac{4as + 4s^2}{a^2}(ax + x^2),$$

épen mint a' körkörnél, — de ellenkező jegyekkel.

42. §.

Ha a' másod-tengely az első-tengelylyel egyenlő: akkor a' mentelék *egyenoldalú.* Ekkor a' góczhúr is egyenlő az első tengelylyel, mert $p = \frac{a^2}{a} = a$. És így ekkor: $a = b = p$.

Az egyenoldalú mentelékre nézve:

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{ap}{a^2} = 1,$$

$$\text{ésígy: } y^2 = ax + x^2;$$

melly egyenlet épen a' körre nézve is áll, mint tudjuk, ellenkező jegyekkel.

43. §.

Lényeges különbség a' körkör és mentelék közt az, hogy az elsőnél a' rendszálak csak addig nőhetnek, mig a' metszékek kisebbek, mint féltengely; de ha ennél nagyobbak a' metszékek, akkor a' rendszálak mind inkább inkább kisebbednek. Ellenben a' menteléknél a' rendszálak határtalanul növekedhetnek, — 's így a' mentelék' szárai, a' folytatott nagy tengelytől, vagy metszékvonaltól határtalanul eltávozhatnak. Mert ezen egyenlet:

$$y = \pm \sqrt{px + \frac{px^2}{a}}$$

nyilván mutatja, hogy minél nagyobb az x, annál nagyobb az y is.

44. §.

Az A tetőponthoz képest, a' melly metszékek a' felvett mentelékben folytatott nagy tengelyen (a) esnek, azokat nevezik *igenlegeseknek*; — ellenben azon metszékeket, mellyek az A tetőponton túl, vagy a' nagytengelyen, vagy még annak tovább is folytatásán esnek, nevezik *nemlegeseknek* $= -x$. Már:

1) Ha $x = o$: akkor ezen egyenlet:

$$y = \pm \sqrt{px + \frac{px^2}{a}} = o;$$ azaz az A tetőpontnál a' rendszál $= o$.

2) Ha $-x = a$: akkor ezen egyenlet:

$$y = \pm \sqrt{px + \frac{px^2}{a}} = \pm \sqrt{px + \frac{px^2}{-x}}$$

lesz: $y = \pm \sqrt{px - px} = o$,

azaz: ha a' nemleges metszék épen maga a' nagytengely, — vagyis a' B tetőpontnál, a' rendszál $= o$.

3) Ha $-x < a$: akkor ezen egyenlet:

$$y = \sqrt{\frac{p}{a}(x^2 + ax)},$$

így lesz:

$$y = \sqrt{\frac{p}{a}(x^2 - ax)} = \sqrt{\frac{p}{a}[(x-a).x]}.$$

Azonban ha $x < a$: úgy ezen kifejezet: $(x - a) x$, mindig nemleges; — és a' nemleges négyleggyökér képtelen. — Tehát azon esetben, ha a' nemleges metszék kisebb, mint a' nagytengely: a' rendszál képtelen.

4) Ha $-x > a$: ekkor ezen egyenlet:

$$y = \sqrt{\frac{p}{a}.(x^2 + ax)},$$

így lesz: $y = \sqrt{\frac{p}{a}(x^2 - ax)},$

de mivel $-x > a$: tehát: $(x - a) x$, most igenleges mennyiség, — ésígy a' fejtendő gyökér nem képtelen; 's így az $y =$ létező rendszál, melly annál inkább nő, minél inbább nő az x, t. i. $-x$. —

Így tehát a' B-nél kezdődik egy másik mentelék, melly az előbbivel ellenkező irányra tartja szárait, — de amazzal egyenlő, — 's mint amaz határtalanul növekedhetik.

45. §.

A' góczra eső rendszál annyi, mint a' góczhúr' fele.

Ugyanis ezen esetben: $x = s$, ésígy:

$$y^2 = ps + \frac{ps^2}{a},$$

azonban: $p = \frac{4as + 4s^2}{a}$ (39. §.);

$$\text{innen}: \; y^2 = \frac{4a^2s^2 + 4s^3a + 4as^3 + 4s^4}{a^2}$$

$$y^2 = \frac{4a^2s^2 + 8as^3 + 4s^4}{a^2},$$

$$\text{innen}: \; y = \sqrt{\frac{4a^2s^2 + 8as^3 + 4s^4}{a^2}},$$

$$\text{vagy}: \; y = \frac{2as + 2s^2}{a},$$

$$\text{vagy}: \; y = \frac{p}{2}.$$

46. §.

A' góczafter a' közelebbi tetőponttóli távolsága kisebb mint, $\frac{1}{4}$ góczhúr.

Ugyanis a' góczban:

$$y^2 = ps + \frac{ps^2}{a};$$

azonban ugyanezen esetben:

$$y^2 = \frac{p}{2}; \text{ ésígy}: \; y^2 = \frac{p^2}{4}.$$

Az y^2 ezen értekét az előbbi egyenletben helyettesitvén, lesz:

$$\frac{p^2}{4} = ps + \frac{ps^2}{a}$$

$$\text{és}: \; \frac{p}{4} = s + \frac{s^2}{a}.$$

Látnivaló, hogy az *s*, vagyis a' gócz' távola a' közelebbi tetőponttól, kisebb mint $\frac{p}{4}$, — mert ahhoz még $\frac{s^2}{a}$ kell, hogy ezzel egyenlő legyen.

47. §.

A' rendszálak' négylegei úgy vannak egymáshoz, mint az őket illető kétkét metszékek' sokszorozmányai.

Ugyanis: mint eddig, az y rendszálhoz tartozó metszékek legyenek: x, és a + x. Egy másik *u* rendszálhoz tartozó metszékek pedig legyenek: t, és a + t. E' szerint:

$$y^2 : u^2 = px + \frac{px^2}{a} : pt + \frac{pt^2}{a}.$$

Már ha az utóbbi viszony' mindkét tagja sokszoroztatik a-val, és elosztatik p-vel: lesz:

$$y^2 : u^2 = ax + x^2 : at + t^2,$$
$$= (a + x)\, x : (a + t)\, t.$$

48. §.

A' rendszál' négylege, úgy van az illető metszékek' sokszorozmányához: mint a' kis tengely' négylege, a' nagy tengely' négylegéhez; — t. i.

$$y^2 : ax + x^2 = b^2 : a^2.$$

Ugyanis: a' 41. §. szerint:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(ax + x^2)$$

innen: $a^2y^2 = b^2(ax + x^2)$;

innen: $y^2 : ax + x^2 = b^2 : a^2$.

49 §.

Az eddigiekben a' metszékeket az *A* tetőponttól számittottuk. De számithatjuk azokat a' nagy tengely' közepétől t. i. E-től is. Ha ezen esetben a' metszéket *u*-nak nevezzük: úgy az eddigi x lesz: vagy $= u - \frac{1}{2}a$, vagy $= u + \frac{1}{2} a$, a' szerint, a' mint a' metszék vagy igenleges, vagy nemleges. — Ha az eddigi képletekben az x helyett: $u \mp \frac{1}{2} a$–t teszünk: olly képleteket nyerünk, mellyekben a' metszék a' nagy tengely' közepétől számíttatik. P. o. 41. §.

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot (ax - x^2) \text{ helyett}$$

lesz: $$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(u^2 - \frac{a^2}{4}\right) = \frac{b^2u^2}{a^2} - \frac{b^2}{4}.$$

50. §.

Id. 6. Ha a' mentelék' *A* tetőpontjánál (id. 6.), a' nagy tengelyre függőlegesen IK vonal húzatik, úgy hogy legyen $AI = AK = \frac{1}{2} b$; továbbá az E középpontból, az I és K pontokon keresztül, EL és EM egyenes vonalak húzatnak: ezen EL és EM vonalak neveztetnek a' mentelék' *közelítőinek* (asymptota).

Ha az O pontból, a' megnyujtott tengely' mind-két oldala felől OQ rendszálak húzatnak, 's ezek mind-két felől a' közelítőig megnyujtatnak, t. i. az N–ig és P–ig: tehát *az NP vonal két részeinek, mellyekre a' mentelék' egyik szára által osztatik, NQ, és QP–nek sokszorozmánya annyi, mint a' fél kistengely' négylege.*

T. i. $NQ \cdot QP = \frac{b^2}{4}$.

Ugyanis:

$$\triangle EAI \backsim \triangle EON;$$

tehát: $EA : AI = EO : ON$;

vagy: $\frac{a}{2} : \frac{b}{2} = \frac{a}{2} + x : ON,$

$$\text{ésígy: } ON = OP = \frac{b}{2} + \frac{bx}{a}.$$

$$\text{Azonban: } NQ = ON - OQ = \frac{b}{2} + \frac{bx}{a} - y;$$

$$\text{és: } QP = \frac{b}{2} + \frac{bx}{a} + y;$$

innen:

$$NQ\,.\,QP = \left(\frac{b}{2} + \frac{bx}{a} - y\right)\left(\frac{b}{2} + \frac{bx}{a} + y\right).$$

$$\text{vagy: } NQ\,.\,QP = \frac{b^2}{4} + \frac{b^2x}{a} + \frac{b^2x^2}{a^2} - y^2$$

$$\text{Azonban: } \frac{b^2x}{a} + \frac{b^2x^2}{a^2} = \frac{b^2}{a}\left(x + \frac{x^2}{a}\right) = y^2$$

mint 41. §-ban látánk;

$$\text{innen: } NQ\,.\,QP = \frac{b^2}{4} + y^2 - y^2$$

$$\text{végre: } NQ\,.\,QP = \frac{b^2}{4}.$$

51.

Innen egyenesen folyik, hogy a' közelítők a' mentelékkel soha össze nem érhetnek.

Ugyanis: tegyük fel, hogy ezek valamelly pontban összeérnének: úgy ezen pontra nézve a' rendszál (y) lenne az $ON = \frac{b}{2} + \frac{bx}{a}$.

$$\text{Ésígy lenne: } y^2 = \frac{b^2}{4} + \frac{b^2x}{a} + \frac{b^2x^2}{a^2};$$

úgyde a' 41. §. szerint:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(ax + x^2),$$

$$\text{vagy: } y^2 = \frac{b^2x}{a} + \frac{b^2x^2}{a^2},$$

melly egyenlet a' mentelék' minden pontjaira nézve áll; ésígy a' minden esetben lehető rendszál, OQ, a' most feltételezett rendszálnál ON-nél kisebb $\frac{b^2}{4}$-el. Ésígy, ON rendszál soha sem lehet; *vagyis a' mentelék a' közelitővel soha össze nem érhet.*

52. §.

Azonban ámbár a' közelitök a' mentelékkel soha össze nem érhetnek: *mindazáltal folytonosan közelítnek egymáshoz;* azaz, az NQ és nq távolságok annál inkább kisebbülnek, minél inkább nö a' mentelék.

Mert: 50. §. szerint:

$$NQ \cdot QP = \frac{b^2}{4}$$

$$\text{hasónlólag: } nq \cdot qp = \frac{b^2}{4}$$

$$\text{innen: } NQ \cdot QP = nq \cdot qp,$$

$$\text{innen: } NQ : nq = qp : QP;$$

$$\text{vagy: } NQ : nq = oq : OQ,$$

már oq mindig nagyobb, mint OQ, mert a' rendszálak a' metszékekkel együtt nőnek; ésígy NQ > nq.

53. §.

„*Feladat.*“ *Adatván a' mentelék' két tengelyei AB*
Id. 6. *és CD (id. 6.): a' góczokat F, és f, megtalálni.*

Megf. E' végre vegyük figyelemre, hogy EF = EF = AC. Tehát csak *a' fél-nagy és kis-tengelyek' négylegei adassanak össze, 's ezen összegből négyleg-gyökér vonassék: ez mutatja a' gócz' helyzetét.

$$\text{T. i. EF} = \text{Ef} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}}$$

$$\text{mert: } \overline{\text{EF}}^2 = \overline{\text{Ef}}^2 = \text{AC}^2 = \text{AE}^2 + \overline{\text{CE}}^2$$

$$\text{vagy: } \overline{\text{EF}}^2 = \overline{\text{Ef}}^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \text{ 'sat.}$$

54. §.

„*Feladat.*" *Adatván a' menteléken valamelly pont G: arra érintőt húzni.*

Megf. Az érintő olly vonal tartozik lenni, mellynek egy pontja G, a' mentelékkel közös legyen, — de bármelly más pontja azon kivül essék. Erre nézve kihuzván a' két vezér-sugárt, GF, Gf: legyen GH = GF, 's húzzuk ki az FH-t, és ezt osszuk el két egyenlő részre az I-nél. Az I ponton keresztül függőlegesen húzott KL vonal lesz a' G pontra érintő. Mert: 1) ennek G pontja a' mentelékkel közös; 2) minden más pontja, p. o. *m*, a' menteléken kivül esik. Ugyanis

1) *az elsőt illetőleg*: a' HGF egyenszárú háromszögben a' talp' közepén függőlegesen álló vonal a' tetőponton megy keresztül. Ésígy az LK a' G ponton keresztül megy.

2) a' *másodikat illetőleg:* ha az *m* a' menteléken esnék: úgy mf — mF annyi volna, mint: Gf — GF.

Azonban: FG = HG, és Fm = Hm;

tehát: $fG - HG = fm - Hm$,
tehát: $fH = fm - Hm$,
's így: $fH + Hm = fm$ . . . volna;
ez pedig képtelen, mert a' $\triangle$-ben két oldal' összegével a' 3-dik egyenlő nem lehet. — Ésígy az *m* pont a' menteléken nem eshetik. — Tehát a' KL vonal a' G pontra érintő.

55. §.

Az fGK és FGK szögletek, mellyeket a' vezérsugarak az érintővel képeznek, egyenlők.

Mert a' tértanból tudva van, hogy az egyenszáru háromszög' talpát két egyenlő részre metsző függöny, a' tető-szögletet is két egyenlő részre osztja. Itt pedig épen ezen eset van: ésígy $\angle fGK = \angle FGK$.

Követk. Mivel: $\angle FGK = \angle fGK$,
azonban: $\angle fGK = \angle LGN$ (csúcs-szög.)
tehát: $\angle FGK = \angle LGN$.

Innen látnivaló, hogy az F góczból a' minő szöglet alatt pattan sugár a' mentelékre, épen ollyan alatt pattan vissza; és ollyan uton megy, mintha a' másik góczból, az f-ből jöne egyenesen. — Innen érthetni meg, miért igen helyes, ha a' fütő-kandallónak mentelékes idoma van; t. i. az F góczban egő tüzről, a' kandalló falára eső hév-sugarak, arról ollyan irányon vettetnek vissza, hogy a' szobába messze behathatnak. — Épen ezen okon, ha lámpában, mentelékes völgyes-tükör' goczában ég a' gyertya, annak fénye messze elterjed.

56. §.

Mint a' körkörnél, úgy a' menteléknél is, a' nagy tengelynek és folytatásának azon része, PO, melly a'

G érintéspontról huzható rendszál GP, és a' nagytengelynek az érintőveli metszéspontja O között esik, neveztetik *alérintőnek* (subtangens). Továbbá a' GQ vonal, melly a' G érintés-pontról, a' nagytengely' folytatására függőleges, neveztetik itt is *függő*-nek (normalis); és a' rendszál- 's függő közötti rész a' folytatott nagytengelyből, t. i. PQ, *alfüggőnek* (subnormalis).

57. §.

„*Feladat.*" *A' menteléknél az alérintő' értekét kifejező egyenletet találni.*

Megf. Az fGF háromszögben, a' KL érintő a' G szögletet két egyenlő részre osztja. Innen:

$$fG : FG = fO : FO.$$

Legyen, mint fentebb, FG = z, — innen fG lesz = a + z.

Innen: $a + z : z = fO : FO$;

és: $a + z + z : z = fO + FO : FO$;

azonban: $fO + FO = a + 2s$;

innen: $a + 2z : z = a + 2s : FO$;

innen: $FO = \dfrac{az + 2sz}{a + 2z}$.

Azonban (40. §.): $z = \dfrac{2sx + as + ax}{a}$.

Ha a' z' ezen értekét az utóbbi egyenletben helyettesítjük: lesz:

$$FO = \frac{2asx + a^2s + a^2x + 4s^2x + 2as^2 + 2asx}{a^2 + 4sx + 2as + 2ax};$$

$$FO = \frac{2s\,(2sx + as + ax) + a\,(2sx + as + ax)}{2s\,(a + 2x) + a\,(a + 2x)};$$

$$FO = \frac{(2s+a)(2sx+as+ax)}{(2s+a)(a+2x)},$$

$$FO = \frac{2sx+as+ax}{a+2x}.$$

Azonban az alérintő $PO = FO + x - s$,

$$\text{vagy: } PO = \frac{2sx+as+ax}{a+2x} + x - s;$$

$$\text{vagy: } PO = \frac{2sx+as+ax+ax+2x^2-as-2xs}{a+2x}$$

$$\text{vagy: } PO = \frac{2ax+2x^2}{a+2x};$$

azaz: *a' nagytengely' kettőzete (2a), a' metszékkel (x) sokszoroztatik, — ehhez adatik a' metszék' négyleyének kettőzete; 's ezen összeg, a' nagy tengely' és kettőzött metszék' összegével elosztatik: 's kijő az alérintő.*

Itt is a' körkör'- és mentelék' alérintőit illető egyenletek közötti nagy hasonlóság szembetünő.

58. §.

A' mentelék' érintője, a' tengelyt mindig, — még pedig E középpontján mindig alul metszi.

Ugyanis:

$$AO = PO - x,$$

$$\text{vagy: } AO = \frac{2ax+2x^2}{a+2x} - x,$$

$$\text{vagy: } AO = \frac{2ax+2x^2-ax-2x^2}{a+2x},$$

$$\text{vagy: } AO = \frac{ax}{a+2x},$$

az AE értéke pedig $= \frac{a}{2}$.

Már ha meg akarjuk tudni, hogy az AO lehet-e akkora, vagy nagyobb, mint az AE: ezeknek tört alakbani kifejezeteit vegyük egy nevezőre; lesz:

$$AO = \frac{2ax}{2a + 4x},$$

$$\text{és: } AE = \frac{a^2 + 2ax}{2a + 4x}:$$

látniváló, hogy AE az AO-nál mindig nagyobb.

59. §.

„*Feladat.*" *A' menteléknél az alfüggő' értekét kifejező egyenletet találni.*

Megf. A' körkör' alfüggője' értekének kifejezetéből ezt kicsinálhatjuk, — tudván, hogy itt az *a*-t nemlegesen kell venni — Ott az alfüggő $= \frac{ap - 2px}{2a}$; itt lesz:

$$\frac{-ap - 2px}{-2a} = \frac{-(ap + 2px)}{-2a} = \frac{ap + 2px}{2a}.$$

Ugyanezt így is lehozhatni:

$$OP : GP = GP : PQ,$$

$$\text{vagy: } \frac{2ax + 2x^2}{a + 2x} : y = y : PQ,$$

$$\text{innen: } PQ = \frac{y^2 (a + 2x)}{2ax + 2x^2};$$

$$\text{azonban tudjuk, hogy: } y^2 = \frac{p}{a} (ax + x^2),$$

vagy : $y^2 = \frac{p}{2a} . (2ax + 2x^2)$;

innen : $PQ = \frac{\frac{p}{2a}(2ax + 2x^2)(a + 2x)}{2ax + 2x^2}$,

vagy : $PQ = \frac{p}{2a}(a + 2x) = \frac{ap + 2px}{2a}$.

60. §.

„*Feladat.*“ *Valamelly mentelék-szelet' udvarát kiszámítni.* (id. 8.)

Id. 8. *Megf.* Ez csak közelítés által történhetik illyen formán. Ha az ember az AILD trapezium' udvarát kiszámitná; és abból az AILB udvarterületet kivonná: ott maradna a' fél-mentelék-szelet' udvara. — Az AILB udvart pedig úgy lehet kiszámítni, ha több apró trapeziumokra, AIRQ, QRrq, 'sat. osztatik, — mellyekben, mivel kicsinyek, az AQ, Qq, 'sat. oldalokat egyenes vonalak gyanánt vehetjük, — és ezen apró trapeziumok' udvarai kiszámíttatnak, 's összeadatnak.

61. §.

Ha egy mentelékszelet, megnyujtott tengelye körül egészen megfordúl, szül egy rendes testet, melly *hyperbolois*-nak (menteléktest) neveztetik. — Ennek tömegtartalmát (id. 8.) úgy lehet kiszámítni, ha az IKML trapeziumnak az AD tengely körüli megfordulása által származott csonka kúp' tömegét kiszámitnók; — továbbá kikeresnök a' KILBACMK öblös test' tömegtartalmát is; — ekkor ezt az előbbiből kivonnók; — mert a' mi ott maradna, az lenne a' hyperbolois' tömegtartalma.

Hogy a' KILBACMK völgyes test' tömegtartalmát kikereshessük: arra nézve jegyezzük meg, hogy az annyi, mint a' KILM csonka kúp–, és ABC hyperbolois' tömegei közötti különbség. — Továbbá a' csonka kúp' tömegét is, a' hypebolois' tömegét is képzelhetjük állani végetlen kis-egyenlő-magosságu hengerekből, sokszorozva az AD magossággal. — És ezen tömegek' különbsége kijő, ha az ezeket alkotó, egyenlő magosságú kis hengerek közötti különbséget AD magossággal sokszorozzuk. — Azon hengerek közötti különbség pedig csak a' fenékterületeik közötti különbségtől származik, mert magosságaik egyenlők. — Legyen a' csonkakúpbeli hengerek' fenékterülete $= C$, a' hyperboloisbelieké $= c$: innen, a' tértani szabályok szerint :

$$C - c = (R^2 - r^2)\,\pi$$

$$\text{vagy: } C - c = (R + r)(R - r)\,\pi$$

ésígy ezen fenékterületek közötti különbség egy ollyan körterület, mellynek sugara a' nagyobbik és kisebbik kör' (C és c) sugaraik' összege és különbsége közötti középarányos.*) — Már a 8. idomon a' C kör' sugara $= ON$, — a' c köré pedig $= OQ$, — ezek' összege $= NQ$, — különbsége $= RQ$. — Azonban 53. §. szerint :

$$RQ \,.\, NQ = \frac{b^2}{4}$$

$$\text{innen: } RQ : \frac{b}{2} = \frac{b}{2} : NQ;$$

honnan látnivaló, hogy az emlitett két körök' sugarai között középarányos a' kistengely' fele.

E' szerint e' keresett ILBACMK völgyes tömeg' tartalma kijő, ha a' mentelék' kistengelyének felével,

---

*) Legyen azon $C - c$ körterület sugara $= \varrho$; lesz: $(R + r) : \varrho = \varrho : (R - r)$; innen: $\varrho^2 = (R + r)(R - r)$; és $C - c = \varrho^2 \pi$

mint sugárral képezhető körterület, az AD magossággal sokszoroztatik, — 'sat.

HARMADIK CZIKKELY.

A' *hajtalékról* (parabola).

62. §.

A' *hajtalék* (parabola) ollyan be nem zárt, v. nyilt
Id. 9. görbe vonal, AMm (id. 9.), mellynek jelleme az, hogy ha egy rajta keresztül húzott egyenes vonalon CD, két pontok F, f, a' tetőponttól A, egyenlő távolságra felvétetnek, — és az f ponton keresztül megy egy a' CD-re függőleges vonal BE; a' hajtalék' bármelly G pontja, az F ponttól és ezen BE vonaltól egyenlő távolságra van. — Az A tehát = *tetőpont*, — az F és f = *góczok*; — CD = *tengely*; — a' BE pedig = *irányadó*-nak (linea directrix) neveztetik.

63. §.

A' gócznak F, a' tetőponttóli, és az irányadótóli távolságaihoz harmadarányos vonal itt is *góczhúr*nak (parameter) neveztetik. T. i.

$$FA : Ff = Ff : p,$$

$$\text{innen: } p = \frac{\overline{Ff}^2}{FA};$$

vagy ha, mint fentebb, FA = s; mivel Ff = 2FA,

$$\text{lesz: } p = \frac{4s^2}{s} = 4s;$$

azaz: a' hajtaléknál a' góczhúr négy akkora, mint a' gócznák tetőponttóli távolsága.

64. §.

Felvévén a' hajtalékon egy pontot, G; 's húzván arra *rendszálat*, GI; lesz AI az ehhez tartozó *metszék*. És a' HGIf négyszög, mivel a' H és I szögletek egyenesek, párlag lesz; — a' HGF háromszög pedig egyenszárú, mert HG = GF. E' szerint:

$$fI = HG = FG.$$

Azonban: fI = s + x; következőleg az FGI egyenesszögü háromszögben, a' feszesoldal FG = s + x; az FI mellékoldal pedig = x — s.

Innen a' rendszál GI–, vagy y–ra nézve:

$$y^2 = (s+x)^2 - (x - s)^2$$

vagy: $y^2 = s^2 + 2sx + x^2 - x^2 + 2sx - s^2$

vagy: $y^2 = 4sx$. Ugyde: $4s = p$; innen:

$$y^2 = px \text{ . és } y = \sqrt{px}.$$

A' most lehozott képlet a' *hajtalék' egyenleté*nek neveztetik, 's ezt teszi, hogy: a' *hajtaléknál a' rendszál' négylege annyi, mint az illető metszéknek a' góczhúrrali sokszorozmánya.*

Ha épen góczba húzatik rendszál: akkor x = s; — ésígy akkor: $y^2 = ps$; vagy mivel $p = 4s$, tehát:

$$y^2 = 4s^2$$

$$\text{és: } y = \sqrt{4s^2} = 2s = \frac{p}{2};$$

azaz: a' góczhúroni rendszál annyi, mint félgóczhúr.

65. §.

Mivel $y = \pm\sqrt{px}$: tehát minden metszékre nézve két egyenlő rendszálak vannak, mellyek a' tengely' két oldalán feküsznek. Innen a' tengely a' hajtalékot két egyenlő részre osztja.

Ha a' tengelyt, az A tetőponttól ellenkező irányra nyujtjuk, — vagyis nemleges tengelyt veszünk fel: akkor:

$$y^2 = -px,$$
$$\text{és } y = \sqrt{-px}.$$

Ezen esetben tehát az y képtelen mennyiség. Honnan látnivaló, hogy a' nemleges tengelyen hajtalék nem származhatik; ésígy ugyanazon tengelyre nézve csak egy hajtalék van; — nem úgy, mint a' mentelékre nézve látánk.

Csak egy pontban, t. i. az A-nál $x = o$, — ésígy ott y is $= o$. A' hajtalékra nézve tehát csak egy tetőpont van, — 's annak szárai annál inkább eltávoznak egymástól, minél inkább nő a' metszék.

66. §.

Hogy *a' góczhúr, minden metszékhez, és ahhoz tartozó rendszálhoz is harmadarányos:* kitűnik ezen egyenletből:

$$y^2 = px; \text{ mert ebből illy}$$
$$\text{arány lesz: } x : y = y : p.$$

67. §.

A' hajtaléknál a' rendszálak' négylegei úgy vannak egymáshoz, mint az illető metszékek.

Mert egy másik *u* metszékhez tartozzék *t* rendszál; mivel $t^2 = pu$:

$$\text{lesz: } y^2 : t^2 = px : pu = x : u.$$

68 §.

„Feladat.“ A' hajtalék' valamelly adott G pontjára érintőt húzni. (id. 9.) id. 9.

Megf. Húzzunk a' G pontból az irányadóra GH függönyt; húzzuk a' HF és GF vonalakat, — a' HF-et osszuk két egyenlő részre az o-nál. Húzzunk a' HF-re az o-nál függőleges vonalat KL, — ez a' G pontra érintő lesz, — mert: 1) a' G pont ezzel és a' hajtalékkal közös, — 2) minden más pontja ezen vonalnak, p. o. *w*, a' hajtalékon kivül esik.

1) Az *elsőt illetőleg*: a' G pont az FGH egyenszárú háromszög' tetőpontja; — tehát azon △' talpának közepén menő függöny KL, ezen tetőponton is keresztül megy.

2) A' *másodikat illetőleg*: húzzunk a' *w* pontról az irányadóra függőlegesen wz vonalat. Már ha a' w pont a' hajtalékon esnék, úgy

$$wz = wF \text{ volna};$$

úgyde, mivel wHF háromszög egyenszárú, tehát:

$$wF = wH; \text{ ésígy}$$
$$wH = wz \text{ volna};$$

ez pedig a' wHz egyenes-szögű △-ben képtelen. Ésígy a' w pont a' hajtalékon nem eshetik. Ésígy KL a' G pontra érintő.

69. §.

A' KL érintő, a' HGF egyenszárú háromszög' talpának közepén menvén keresztül: a' HGF szögletet két egyenlő részre osztja. Ésígy:

$$\angle HGo = \angle FGo;$$

$$\text{úgyde: } \angle HGo = \angle LGP:$$
$$\text{ésígy: } \angle FGo = \angle LGP;$$

azaz: *ha az érintéspontból egy vonal a' tengelylyel egyközüleg, — egy másik vonal pedig a' góczfelé húzatik: ezen két vonalak, és az érintő által képzendő szögletek egyenlők.*

Ezen tétel a' gyakorlatban igen fontos. Ugyanis, ha p. o. hajtalékidomú völgyes tükör' góczába tüz, vagy fénylö test tétetik: annak sugarai, a' tükör' hajtalékos falának minden pontjaitól, a' tengelylyel, ésígy egymással is egyközüleg vettetnek vissza. — És ezen tünemény megfordítva is áll. T. i. ha illyen tükörre egyközü sugarak mennek: azok a' góczban mind öszszegyülnek, 's ott nagy hőség, vagy fény támad. — Épen ez történik a' hangsugarakkal is. Ha hajtalékidomú fal' goczában valaki beszél: a' még töle távol esö hallgatók' fülébe is erős hangja megy; — 's megforditva, ha a' góczban a' hallgató áll, — más valahol, bármilly lassan beszélőnek minden szavait meghallja, mellyeket egyéb helyen meg nem hallhatni.

70. §.

A' hajtaléknál az alérintő' értekének egyenletét megtalálni. (id. 9.)

Itt a G pontra nézve alérintő a' KI. Már a' HoG és KoF háromszögekben:

$$\angle HoG = \angle KoF, \text{ — csúcsszögletek;}$$
$$\angle GHo = \angle KFo, \text{ — viszások,}$$
$$oH = oF, \text{ — szerkezetnél fogva,}$$
$$\text{innen: } \triangle HoG = \triangle KoF,$$
$$\text{innen: } HG = KF.$$

Ugyde: $HG = fI$:
ésígy: $KF = fI$,
vagy: $KA + AF = fA + AI$.
Azonban $AF = fA$,
ésígy: $KA = AI$,
és: $KI = 2 . AI = 2x$
azaz: *alérintő* $= 2x =$ *kétmetszék.*

71. §.

A' hajtaléknál az alfüggő' értekének egyenletét megtalálni.

A' G pontra nézve alfüggő $= RI$. — Már a' KGR egyenesszögű háromszögben:

$$KI : GI = GI : RI.$$

$$\text{vagy: } 2x : y = y : RI;$$

$$\text{ésígy: } RI = \frac{y^2}{2x} = \frac{px}{2x} = \frac{p}{2}.$$

azaz: *alfüggő* $=$ *félgóczhúr.*

Azonban tudjuk hogy: $p = 4s$, ésígy: $\frac{p}{2} = 2s$;
innen:

$$RI = 2s;$$

azaz: *az alfüggő annyi, mint a' gócz' tetőponttóli távolának kettőzete.*

72. §.

Valamelly hajtalék-idomú terület' udvarát megtalálni. (id. 10.) Id. 10.

Irjunk a' hajtalék körül egy párlagot EImM: ekkor azt állitjuk, hogy *a' hajtalék' udvar-területe, ezen udvar' területének* $\frac{2}{3}$ *része.*

Ugyanis a' hajtalék-vonal' felét AM, osszuk fel végetlen sok apró részekre; 's mind ezen részek' osztály-pontjainál húzzunk vonalakat, mind az AD-vel, mind az AE-vel egyközüleg. Ezek által fognak származni párlagok, ugyananyi számúak lefelé, EFGM 'sat., mint keresztbe HLMD 'sat. — Már a' keresztbe menő párlagok' összege teszi a' félhajtalék' udvarát; — a' lefelé menő párlagok' összege pedig teszi az AEM tér' udvarát. És a' minő viszonyban van egy keresztbe fekvő párlag' udvara, egy lefelé menő párlagéhoz: ollyanban vannak a' többiekéi is; — ollyanban vannak azoknak összegei is egymáshoz; vagy ollyanban van a' félhajtalék' udvara az AEM tér' udvarához. — Kérdés tehát: mi viszonyban van a' HLMD udvara az EFGM udvarához?

Erre nézve húzzuk ki a' KM érintőt, — melly az NM részszel, mivel az felette kicsiny, összeesik. — Képeztetik itt NGM egyenesszögü háromszög, — melly KDM háromszöghez hasonló. Azonban jegyezzük meg, hogy az M pontra nézve, KD = alérintő. Most ezen hasonló háromszögekben:

$$KD : MD = NG : MG,$$

$$\text{vagy: } 2AD : MD = NG : MG = HD : MG,$$

$$\text{ésígy: } MG = \frac{MD \times HD}{2AD}.$$

mér ezen egyenlet' első részét EM-mel, másik részét AD-vel (mivel EM = AD) sokszorozván, lesz:

$$MG \times EM = \frac{MD \times HD}{2}.$$

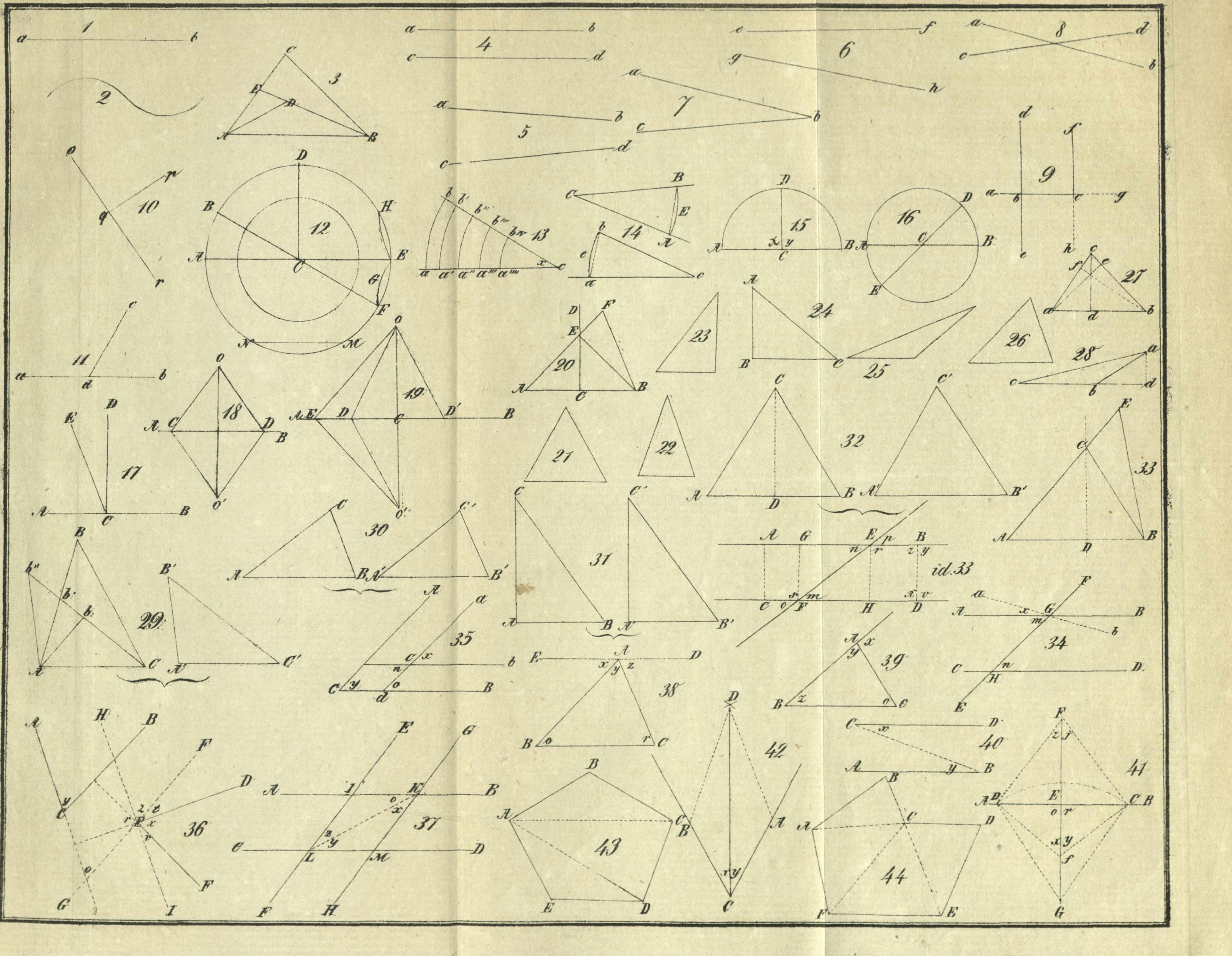
Innen látnivaló, hogy a' HDML párlag' udvara kétakkora, mint az FEMG párlag' udvara. — Igy tehát a' félhajtalék' udvar-területe két-akkora, mint az AEM tér' udvarterülete. — És ha az AEMD fél párlagból $\frac{1}{3}$ rész kivonatik: ott marad a' félhajtalék' udvara; — és ha az EImM egész párlag' udvarából $\frac{1}{3}$-rész kivonatik: ott marad az egész hajtalék' udvara. Ésigy *a' hajtalék' udvara az EImM párlag' udvarának $\frac{2}{3}$ része.*

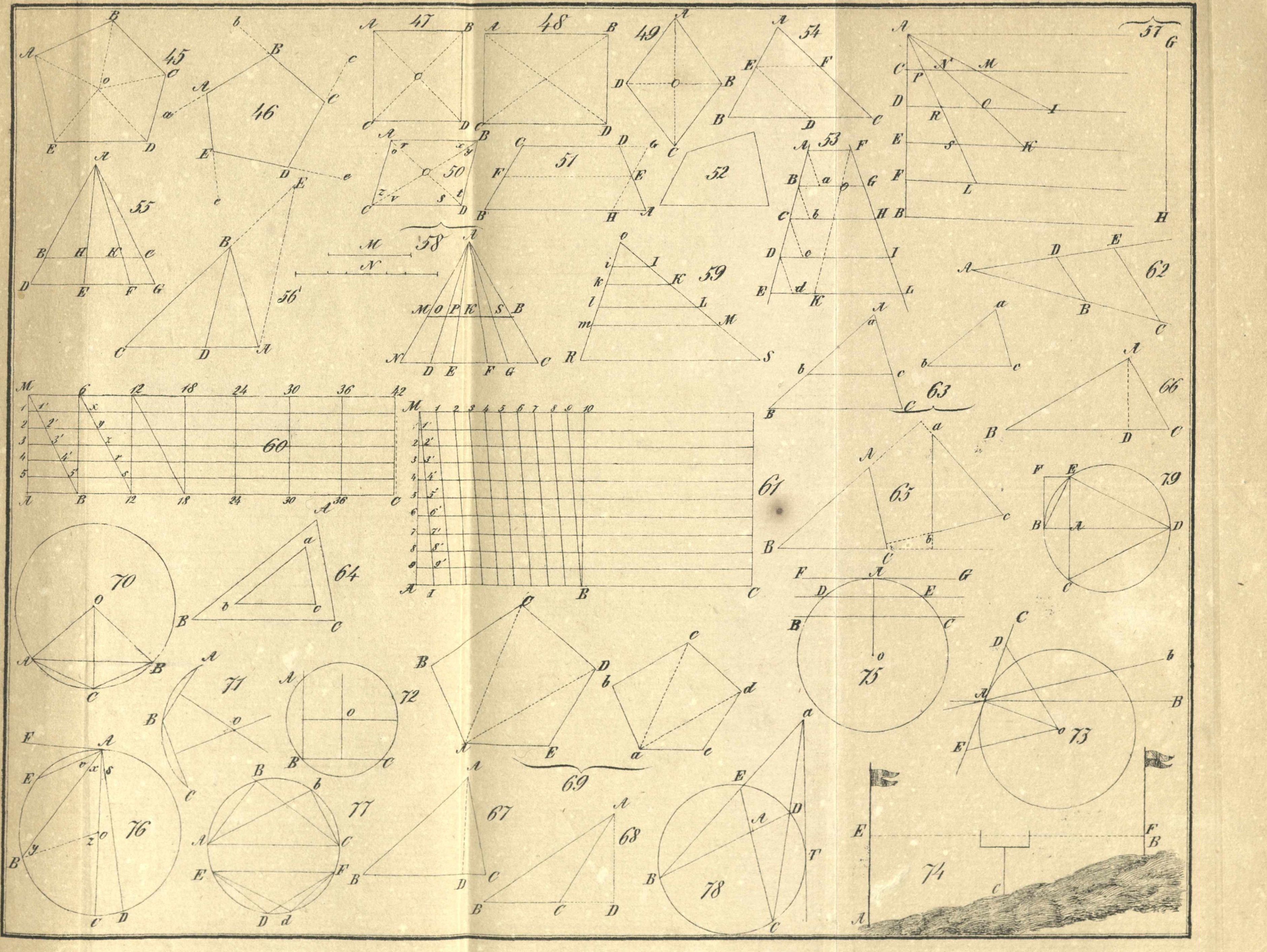
73.

A' hajtalék-tömeg' (parabolois) *tartalma kijő, ha a' fenék' körterülete féltengelylyel sokszoroztatik.* (id. 10).

Ugyanis: képzeljük a' hajtalék' udvarát végetlen sok 's végetlen kicsiny — de épen azért egyenlő magosságú párlagokra, mint Aabc, bdef, 'sat. feloszttatni; — ezen párlagok' összege egyenlő a' hajtalék' udvarával. Ha ezen párlagok a' tengely körül egészen megfordulnak: származnak belőlök ugyanannyi, végetlen kis magosságu hengerek, mellyek' összege teszi a' parabolois' tömegtartalmát. Ezen hengerek' fenekeinek sugarai az illető rendszálak. És ezen hengerek' tömegei, mivel magosságaik egyenlők, úgy vannak egymáshoz, mint fenék-udvaraik; azok pedig úgy, mint sugaraik' négylegei, — ésígy mint a' rendszálak' négylegei. — A' rendszálak' négylegei pedig a' hajtaléknál úgy vannak egymáshoz, mint az illető metszékek. Ésígy az említett hengerek' tömegei úgy vannak egymáshoz, mint a' megfelelő, egyenlő metszékek. — Legyen az első metszék Ab = 1, a' második Ae = 2, Ag = 3, 'sat., — tehát a' hengertömegek olly sorzatban nőnek, mint a' természetes számok. — Ésígy mindezen hengerek' tömegeinek összege épen úgy jő ki, mint a' természetes számok' bizonyos sorzata' minden tagjainak öszszege, t. i. az első és utolsó tag' összege a' tagok' számának felével sokszoroztatik. Már itt az első henger $= o$; — az utolsó pedig = a' parabolois' fenékterülete, végetlen kismagossággal. — Ésígy, mivel az első tag $= o$, nem szaporít: ha a' parabolois' fenékterülete, — minden hengerek' magosságának félösszegével, vagyis a' parabolois' félmagossagával sokszoroztatik, — kijö annak tömegtartalma.

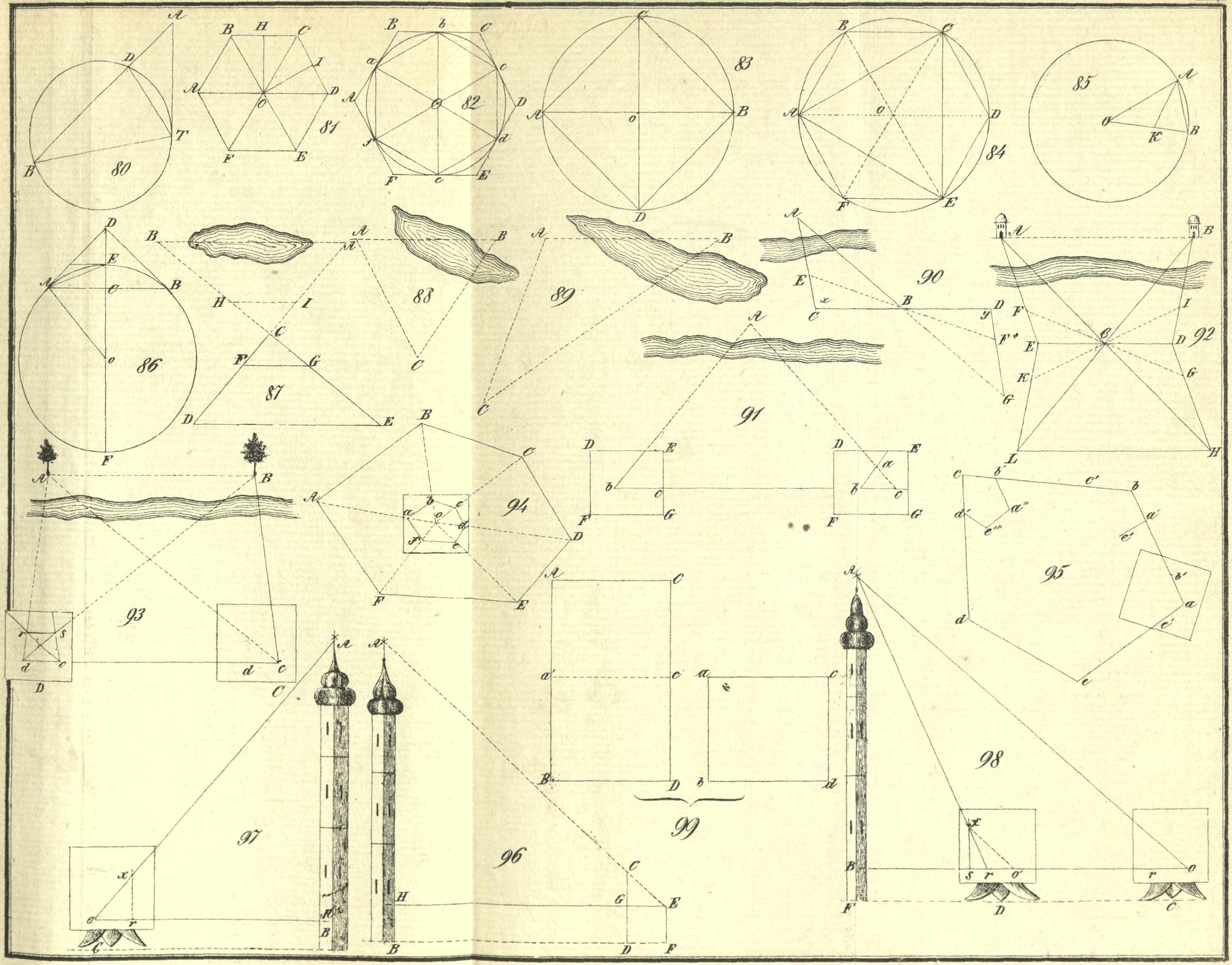
Tértani idomok.

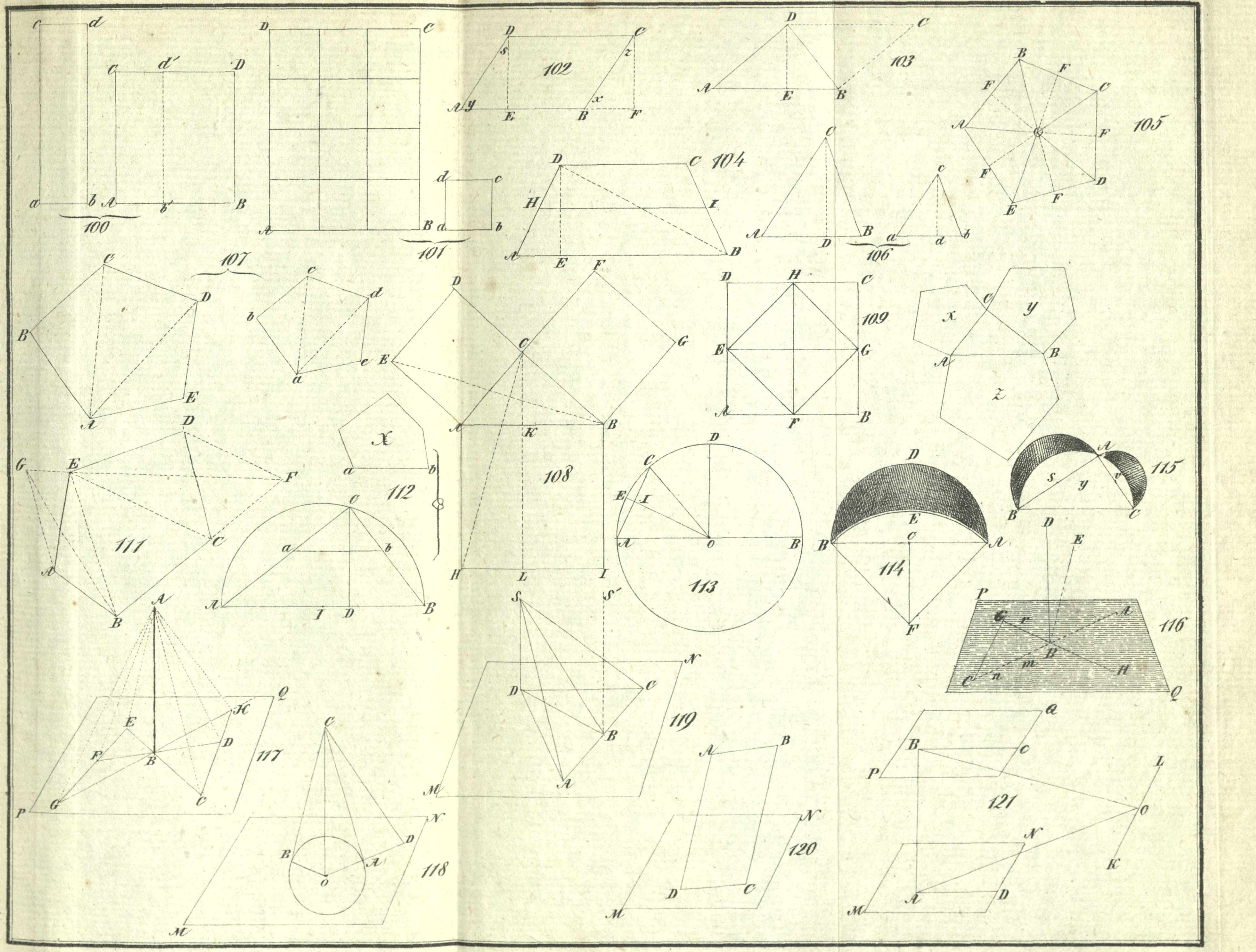


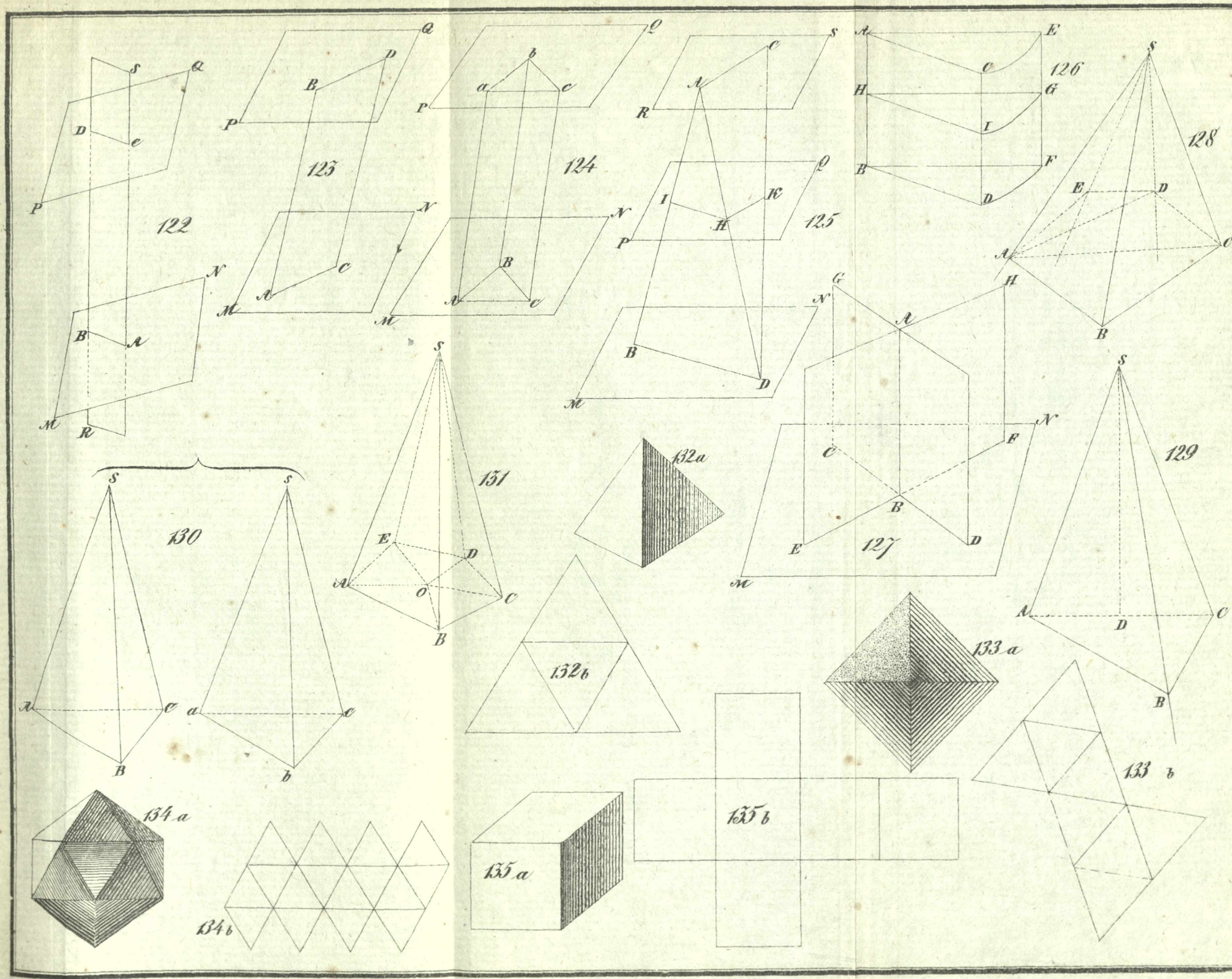


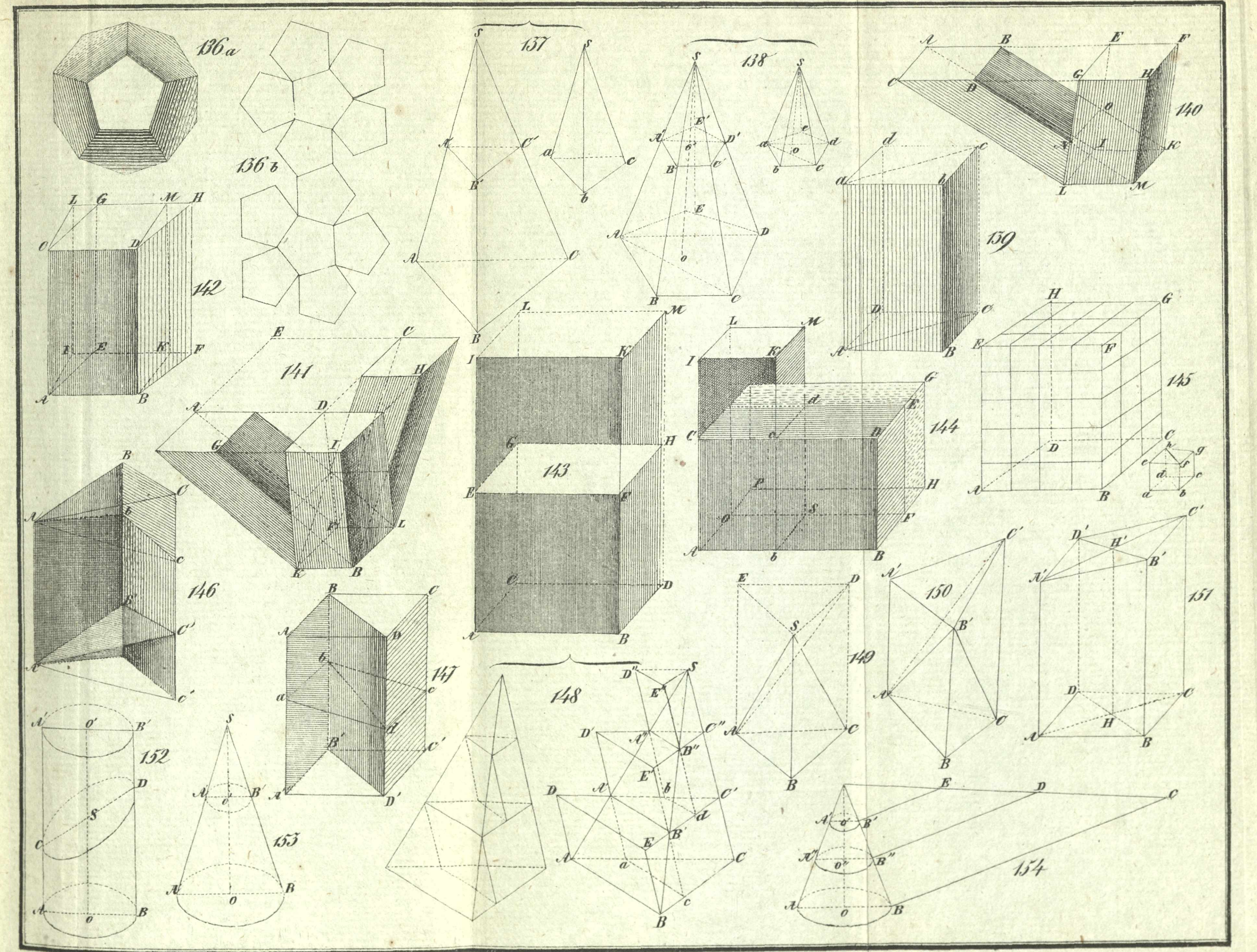
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79

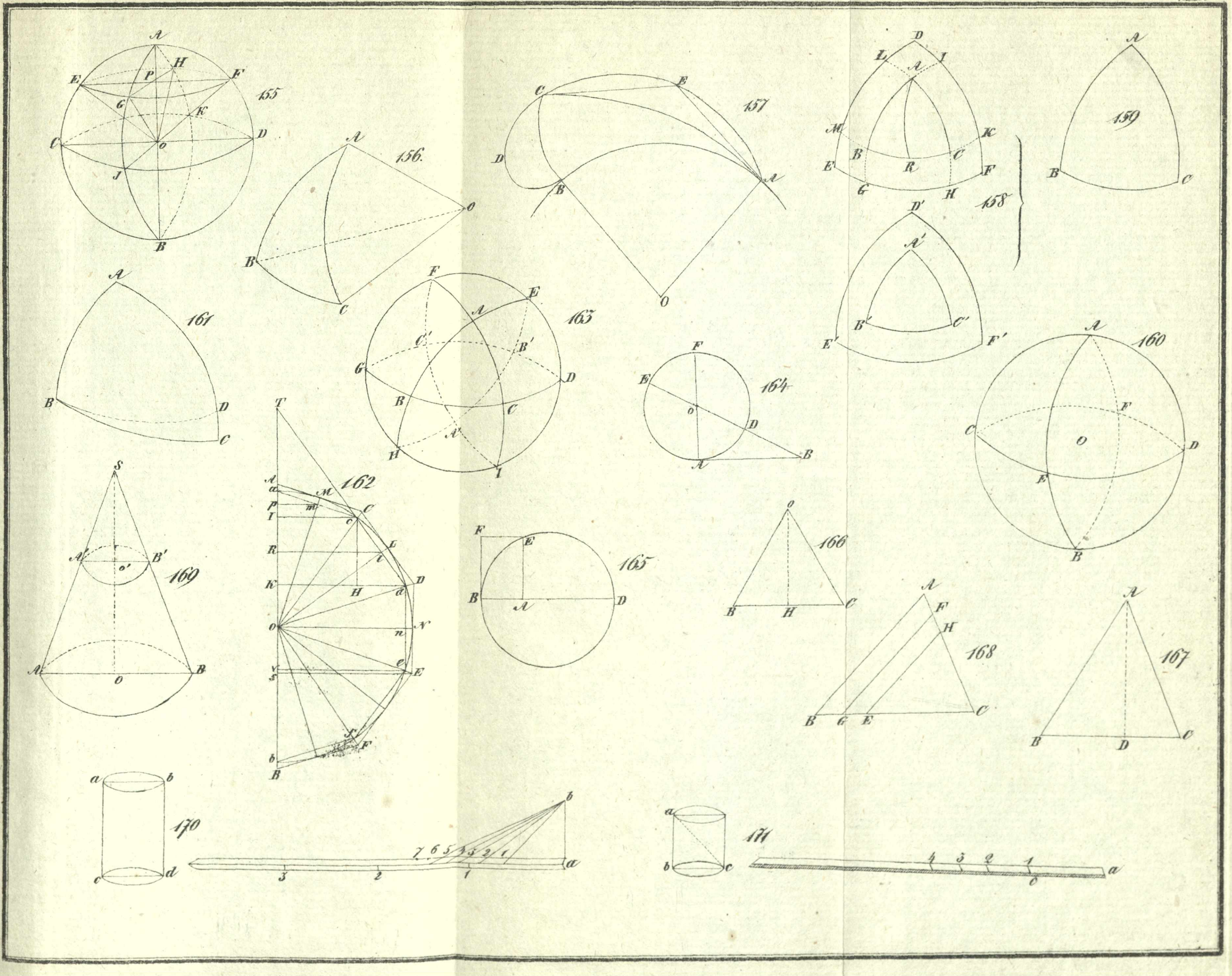
Tértani idomok.

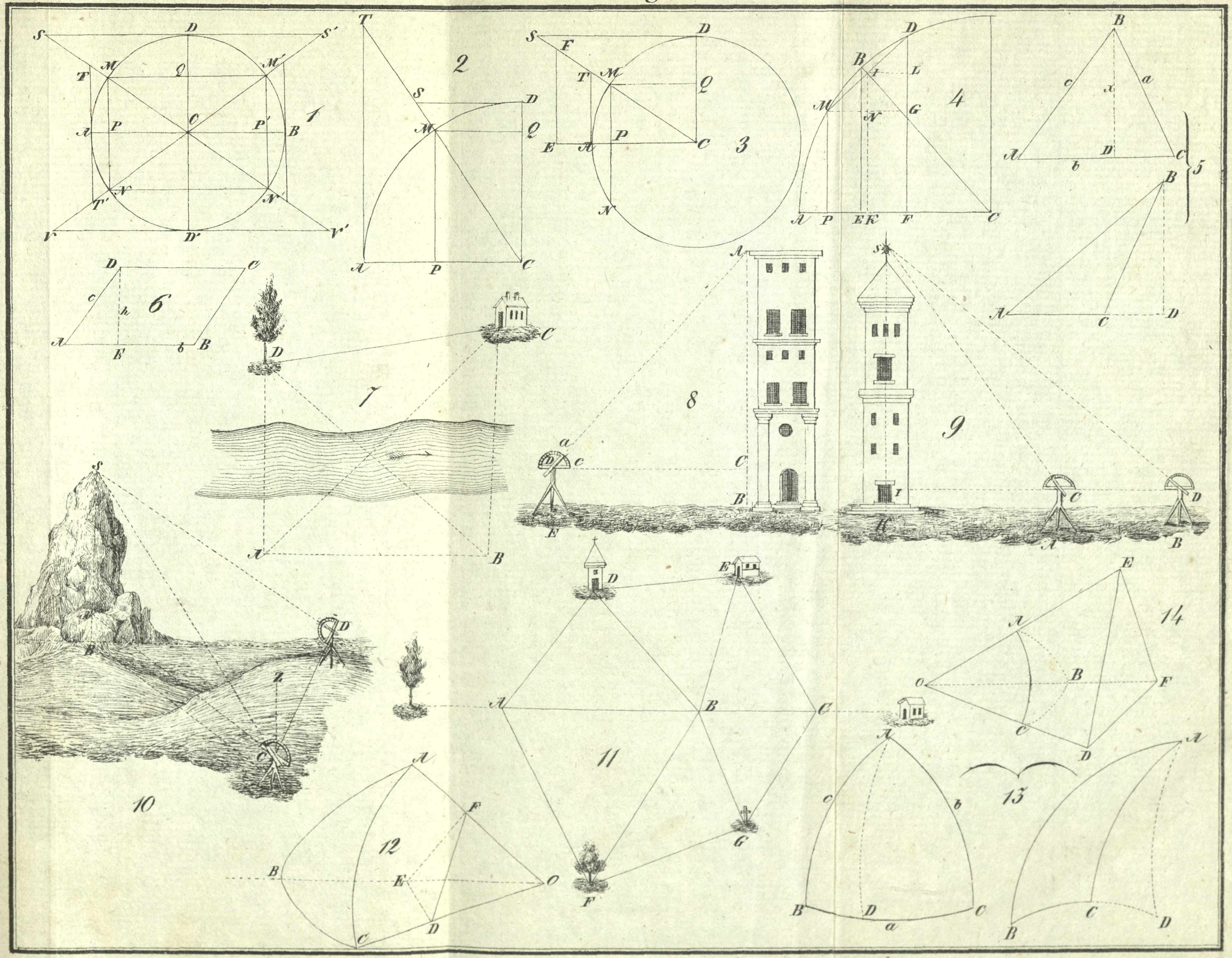


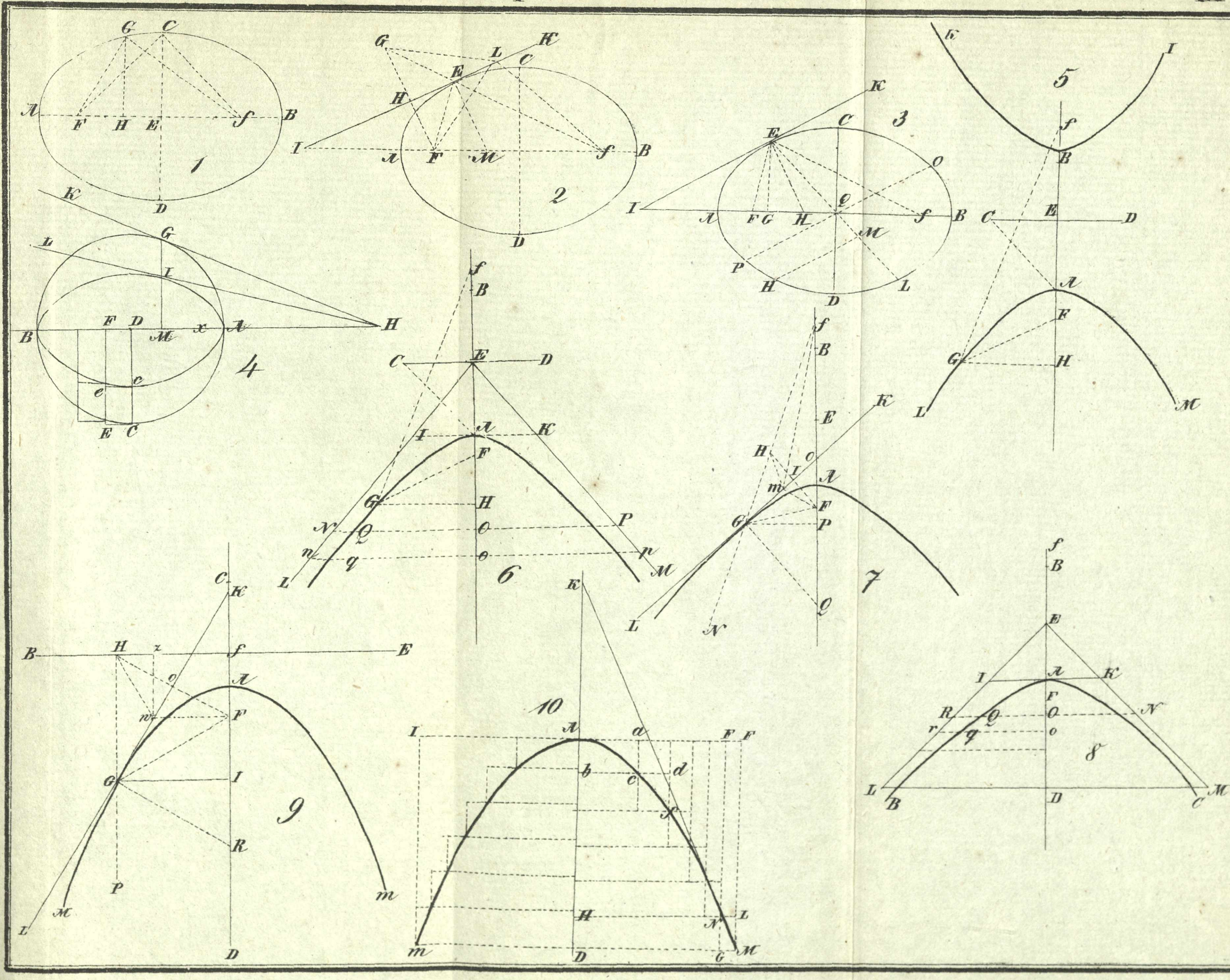

100
101
102
103
104
105
106
107
108
109
111
112
113
114
115
116
117
118
119
120
121


122
123
124
125
126
127
128
129
130
131
132a
132b
133 a
133 b
134 a
134 b
135 a
135 b


136 a
136 b
137
138
139
140
141
142
143
144
145
146
147
148
149
150
151
152
153
154


155
156.
157
158
159
160
161
162
163
164
165
166
167
168
169
170
171


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10