2733. 2741.

77. i.
1902

Tekintetes Nemes Nemzetes és Vitézlő
Kun János Urnak,
Tek. Csongrád Vármegye Tábla-Birájá-
nak, — Szabados Kecskeméth Városa
Tanácsosának, a' Kecskeméti Ref.
Felsőbb Oskola' Világi Felügyelő-
jának Uraságának

alázatos tisztelettel ajánlja
Fatai András
mk.

TISZTA
MATHESIS
KEZDETE.

ELSŐ DARAB.

SZÁM-TUDOMÁNY.

TANITVÁNYI' SZÁMÁRA

KÉSZÍTETTE

TATAI ANDRÁS.

KECSKEMÉTI REFORMATUS PROFESSOR.

PESTEN, 1836.

Nyomtatta Fűskúti Landerer Lajos.

ELŐ-SZÓ.

Azon jegyzeteimet, mellyek szerint Tanítványimat, a' Tiszta Mathesisnek; — az Alkalmaztatott Mathesis némelly ágainak, t. i. az Opticának, és Astronomiának, — végre a' Physicának kezdetébe esztendőnként bevezetni szoktam, egymás után kiadni szándékozom; — nem hiú dicsőségre vágyásból, — mert hiszen ezek, kezdő ifjakon kivül, senki figyelmére számot nem tartándanak; hanem azon tiszta czélból, 's ohajtásból, hogy Tanítványimat, a' terhes, és időt pazérló irástól megmentsem; — 's külömben is, a' tanitás' tárgyaihoz mérve, kevés óráimon, annyival többet végezhessek.

Megjelen hát ime' legelsőben a' Tiszta Mathesis kezdetének első darabja, a' Szám-Tudomány; mellyet kevés hetek múlva fog követni annak második darabja, a' Terjedtség-Tudomány; — 's majd, ha szándékomnak környülállásaim megfelelnek, későbben a' többiek.

Ha ezen munkácska, kezdő ifjún kivül, valakinek kezébe kerülne; — 's talán figyelmére méltatná:

itéletét felőle azon szempontból tenni kérem, mellyből ez, mint oskolai kézi könyv, — még pedig philosophiai pályára most lépett, — több tanúlni valók által is terhelt, — 's nagyobb részént a' Mathesisben csak Dilettant-okká lejendő ifjak számára készűlt kézikönyv, iratott; — igy reménylem sem rövid, sem egyszerü voltában nem fog megbotránkozni.

Irtam Kecskeméten Augustus 20kán 1835

Tatai András.

BÉVEZETÉS.

§. 1. Mind az, a' mit szaporítni, és kevesítni lehet, neveztetik Mennyi-nek (Quantum); p. o. pénzdarab, csomó pénz, búzaszem, búzarakás, gerenda, térföld, idő, sebesség, súly, magasság 's a' t.

§. 2. Minden Mennyik vagy éppen elvannak osztva, vagy eloszthatók legalább gondolattal, kisebb vagy nagyobb, több vagy kevesebb részekre, mellyek mind együtt véve teszik az egész Mennyit. Ezen részeknek sokaságát nevezik Mennyiségnek (Quantitas); p. o. egy csomó pénz már el van osztva több darab pénzekre, — egy darab pénzt ellehet osztani legalább gondolattal több részecskékre, — így a' gerendát, térföldet, időt 's a' t., 's azon részeknek sokasága teszi ezen Mennyiknek Mennyiségét.

§. 3. A' Mennyik kétfélék, u. m.

1. Ollyanok, a' mellyeknek részeik valósággal külön vannak válva egymástól, p. o. rakás buza, csomó pénz, sereg katona. Az illyen Mennyiket nevezik Váltrészű Mennyiknek (Quanta discreta), — ezeknek részeik' sokaságát Váltrészű Mennyiségnek (Quantitas discreta), vagy mivel azon részeket számlálni lehet, Számnak (Numerus).

2. Ollyanok, mellyeknek részeik nincsenek külön válva egymástól; p. o. gerenda, darab pénz, nap' hossza, 's a't. Az illyeneket nevezik Részre nem vált Mennyiknek (Quanta continua); ezeknek gondolt részeik' sokaságát Részre nem vált Mennyiségnek (Quantitas continua) vagy mivel ezekben azt szoktuk nézni: mekkora tért foglalnak el, Terjedtségnek (Extensio).

§. 4. Egy fajta Mennyiknek (Quanta homogenea) neveztetnek az egy nevűek, p. o. az órák az órákkal, fontok a' fontokkal, lábak a' lábakkal egy fajták. — Különfajta Mennyik (Quanta heterogenea) a' külömböző nevűek. Ezek ismét vagy Egyrevehetők (reducibilia), ha ugyan azon nevűekké lehet őket változtatni, p. o. a' fontok a' latokkal, — a' forintok a' garasokkal, az órák a' minutákkal egyrevehető külön fajták; — vagy Egyre nem vehetők (irreducibilia) mellyeket egy nevűekké nem lehet tenni, p. o. az ökrök a' lovakkal, kutyákkal, garasokkal, órákkal.

§. 5. A' Mennyiséget vagy tisztán tekinthetjük mint csupa mennyiséget, a' nélkül, hogy azt valamelly tárgyra vinnénk, a' midőn azt nevezik Elvont Mennyiségnek (quantitas abstracta), p. o. hat, nyolcz, száz 's a' t. — Vagy egyszersmind a' tárgyat is mellé tesszük, a' mellynek az mennyisége, p. o. hat ökör, nyolcz ló, száz ember, — a' midőn az neveztetik Tárgyas Mennyiségnek (quantitas concreta).

§. 6. A' Mennyiknek mennyiségöket ugy lehet megtudni, ha az esmeretlen mennyiséget, valamelly ugyan azon fajta esmert mennyiséggel öszvehasonlítom, és megvizsgálom, hogy az esmertnél mennyivel vagy mennyiszerte több vagy kevesebb, nagyobb vagy kisebb az esmeretlen; vagy hogy hányszor van meg, vagy az esmért az esmeretlenben, vagy az esmeretlen az esmértben; p. o. egy csomó tallér' mennyiségét megtudom, ha azt egy tallérral öszve hasonlítom, 's megvizsgálom, hányszor van meg benne az egy tallér; — egy vég posztó hosszaságát megtudom, ha egy rőfnyi hosszasággal öszvehasonlítom, 's azt kérdem, hányszor van meg benne a' rőf; — egy kis darab posztó hosszaságát is úgy tudom meg, ha azt a' rőffel öszvehasonlítván, azt kérdem, hányszorta nagyobb annál a' rőf? Az esmeretest, mellyhez az esmeretlent hasonlítom, nevezzük Mértéknek (mensura), — ezen munkálódást Méréśnek (mensio), — a' mértéknek, és mérésnek egymáshoz való arányát pedig Szernek (ratio seu relatio).

§. 7. A' Mennyiségről való Tudomány neveztetik Mathesisnek. A' Mathesis tehát arról tanít, mi módon származnak egymásból a' mennyiségek, 's mi módon lehet azokat megmérni, vagy mi módon lehet az esmeretleneket az esmeretesekből kitalálni.

Jegyzék. μάθησις, ιος görög szó, tesz Tudományt (μανθάνω, μάθεω f. 1. μάθηβω, tanúlni, tanítni). Azért nevezték ezt a' Görögök κατεξοχην Tudománynak, mert az ebben megmutatott igazságokat senki kétségbe nem hozhatja; — a' millyen bizonyossággal semmi más Tudomány nem dicsekedhetik.

§. 8. A' Mathesis elosztatik Tisztára (Pura) és Alkalmaztatottra (Applicata). A' Tiszta Mathesis a' Mennyiségek Törvényeit úgy fejtegeti, hogy azokat semmi Tárgyakra nem alkalmaztatja. — Az Alkalmaztatott Mat. pedig azon Törvényeket, mellyek a' Tiszta Mathesisben felfedeztettek, bizonyos Tárgyakra alkalmaztatja. Innen a' Mathesis Applicatában, a' tiszta mathematicai igazságokon kívül a' tárgyaknak physicai tulajdonságaik is tekintetbe jőnek. Ennek részei: az Optica, Astronomia, Mechanica, Architectura Civilis, Militaris 's a' t.

§. 9 A' Tiszta Mathesisnek két része van:

Az 1ső tanít a' Számokról vagy részreváltmennyiségekről (quant. discreta). Ezt nevezik Számtudománynak (Arithmetica).

A' 2dik tanit a' Terjedtségekről, vagy részre nem vált Mennyiségekről (quant. continua). Ezt nevezik Terjedtség Tudományának (Geometria).

Jegyzék. Ἀριθμετικη t. i. Τέχνη; mesterség, tudomány, jön ἄριθμοςtól = Szám — Γεώμετρια jött ettől: γῆ vagy γέα, attice γέως föld, és μέτρεω mérem -- tulajdonképpen tehát Geometria teszen Földmérés Tudományát — minthogy a' Terjedtségmérésnek legelőször Földmérésre vették hasznát.

§. 10. A' Mathematicusok az igazságok keresésében, 's fejtegetésében ollyan utat követnek, melly szerint mindig a' könnyebbekről mennek nehezebbekre 's ismét nehezebbekre, — és a' következők fundamentoma mindig az előbbeniekben van letéve. Ezt nevezik Mathematica-útnak (Methodus Mathematica).

Jegyzék. Valamelly igazságot kétféle módon lehet megmutatni:

a) Vagy úgy, ha legelöl tétetik a' megmutatni való igazság, és utána illő egymásból folyó renddel hordatnak fel azon igazságok, mellyekből az megbizonyíttatik. Ezt nevezik Öszverakó útnak, (Methodus synthetica).

b) Vagy ugy, hogy a' bizonyító igazságok előre bocsáttatnak, és azokból huzatik ki mint következet a' megmutatni való igazság. Ezt nevezik Fejtő utnak (Methodus analytica).

§. 11. Tételnek (Propositio), nevezünk minden mondást. A' Mathesisben előjöhető Tételek kétfélék, u. m.

1. Ollyanok, a' mellyekkel csak az értelem foglalatoskodik. Ezeket nevezik Értelmi Tételeknek (Propositiones Theoreticae), p. o. kétszer kettő négy.

2. Ollyanok, a' mellyek cselekvést is kivánnak; — ezeket nevezik Cselekvési Tételnek (Propositiones Practicae), p. o. egy térfoldet kis formában le kell venni; egy △et két egyenlő részre osztani.

§. 12. Minden Mathematica igazságoknak fundamentomul szolgálnak némelly ollyan igazságok, — vagy minden Tételeknek fundamentomai ollyan Tételek, mellyeknek bizonyosságáról vagy lehetőségéről senki se kételkedik; — mellyekről való meggyőződés mintegy velünk született; — és így a' mellyek semmi megmutatást nem kívánnak (Propositiones indemonstrabiles). Ezek is vagy Értelmiek, vagy Cselekvésiek. Az Értelmi megmutatást nem kívánó Tételt (Propositio Theoretica Indemonst.) Nyilvánvalónak hívják ἀξιωμα, dignum creditu), p. o. minden egész nagyobb a' maga részénél. — A' Cselekvési megmutatást nem kívánó Tételt (Propos. Pract. indem.) hívják Lehetségnek (Postulatum), p. o. két pont közzé egy vonalt lehet húzni.

§. 13. Az ollyan értelmi Tételt, mellynek igaz voltát nem látjuk által, míg meg nem mutatják (Propositio Theoretica demonstrabilis) nevezik Állítmánynak (Theorema), p. o. ha két Háromszegnek talpok és magosságok egyenlők, udvarok is egyenlők. — Az Állitmány mellett tehát mindíg kell lenni Megmutatásnak (Demonstratio), melly nem egyéb, mint több már bizonyos igazságoknak öszveszedése, a' végre, hogy azoknak öszvevetéséből az Állitmány' igaz volta kitessék, p. o. Állitm. Péter halandó. Megmutatás. 1) Minden ember halandó. 2) Péter ember — és így: 3) Péter halandó. — Az Állítmány után szokott tétetni *E. K. M.* Ezt kellett megmutatni (Q. E. D. quod erat demonstrandum).

§. 14. Az ollyan cselekvési Tételt, mellynek lehetőségét nem mindjárt láthatni által, hanem végbevitele valamelly igazságok esméretet, öszvevetését 's mesterséget kíván, neveztetik Feladatnak (Problema), p. o. a' △et karikába bele írni. — Annak előadása, mi módon lessz az meg, a' mit a' feladat kíván, neveztetik Megfejtésnek (Resolutio, vel solutio). — A' Megfejtésnek helyes volta ismét Megmutatást kíván. — Ennek utána szoktak tenni *E. K. Cs.* Ezt kellett cselekedni (Q. E. F. quod erat faciendum).

§. 15. Az ollyan Tétel, melly valamelly más Tételből egyenesen következik, és semmi uj megmutatást nem kíván, neveztetik Következetnek (Consectarium, seu Corollarium).

§. 16. Az ollyan Tétel, melly nem a' szóban forgó tárgyra tartozik tulajdonképpen; de másutt a' maga helyén meg van mutatva; itt pedig csak felvétetik mint igazság, a' végre, hogy segítségével valamit megmutassunk, neveztetik Kölcsönállitmánynak (Lemma).

§. 17. Vannak ollyan Tételek, mellyeket közmegegyezéssel felvettek a' Mathematicusok azért, hogy azoknak segitségök által dolgozásaikat 's megmutatásaikat könnyebbekké 's szembetűnőbbekké tegyék. Ezeket nevezik Egyezményeknek (Hypothesis); p. o. minden karika 360 részre van felosztva. — Illyen Egyezmény az is, hogy a' számokat, hangokat, illyen vagy amollyan jellel terjesszük szem elébe mint 2, 3, 's a' t., a, b, c, 's a' t.

Jegyzék. A' Physicában Hypothesisnek neveztetik az ollyan Tétel, melly ámbár bebizonyitva nincs, még is igazság gyanánt felvétetik, a' végre, hogy vezető fonalúl szolgáljon a' tünemények magyarázásában 's rendbeszedésében; 's igazságnak nézetik mind addig, míg nem igaz volta ki nem sűl, p. o. hogy a' melegség vékony folyó materia. — Az illyen Physicai Hypothesist Véleménynek lehet magyarúl nevezni.

§. 18. A' Jegyzetekben (Scholion) feljegyeztetnek némelly tudni méltó, kétséget oszlató, meggyőződést segitő dolgok.

§. 19. Miután valamelly szónak jelentését tökéletesen felvettük; vagy valamelly tárgynak mivoltát tökéletesen értjük, és azt minden más tárgyaktól meg tudjuk külömböztetni: akkor tudjuk azt Meghatározni (definire). A' Meghatározás (Definitio) tehát nem egyéb, mint valamelly szó jelentésének vagy tárgy mivoltának ollyan leirása, melly által azt minden másoktól meg lehet külömböztetni. Hogy tehát a' Definitio helyes légyen: elő kell abban hordani a' tárgynak minden ollyan jegyeit, mellyek azt másoktól megkülömböztetik, p. o. ha a' számot igy hátaroznám meg: a' szám a' mennyik részeinek sokasága, nem jó volna, — mert ez a' Meghatározás, a'

Terjedtségre is ráillenék. De ez: a' szám a' részre vált Mennyik részeinek sokasága, helyes, mert ez egyedűl csak a' számra illik rá.

§. 20. A' Mathesis haszna nem csak abban áll, hogy annak segítségével fedezhetni fel sok ollyan dolgokat, mellyek az életben szükségesek, p. o. Machinákat s. a' t. — hanem különösen az Ifjakra nézve legfőbb haszna az, hogy az elmét észrevehetőleg fejti, — szoktatja az egyenes gondolkozásra, — tiszta felvételre, rendes, és kimerítő előadásra, és arra, hogy semmit senki szavára addig el ne higyen, 's igazságnak ne tartson, míg tökéletesen be nincs bizonyítva.

§. 21. A' mi a' Mathesis történeteit illeti: annak első feltalálóíról semmit nem tudhatni. A' Görög Irók bizonyitásuk szerint Égyiptomban találták fel a' Geometriát, mivel az ő határaik a' Nilustól minden esztendőben elöntetvén, a' földmérésre sok szükségök volt; — a' Chaldaeaiak pedig az Astronomiában gyönyörködtek. Az Égyiptomiaktól Thales és Pythagoras 600 e. K. sz. e. Görög Országba vitték a' Mathematicai Tudományokat, — mellyeket azután a' Görögök irásaikkal tökéletesítettek. Különös említést érdemlenek az Alexandriai Mathematicusok 's azoknak Tanítványaik, Euclides, Archimedes, Ptolemaeus. Az Alexandriai oskolát ugyan az Arabsok elszéllesztették: azomban a' Mathesist ők magok is kedvellték. Későbben ezen Arabsok Europában is Birodalmat fundálván: a' közép századokban egyedűl ők mivelték a' Mathesist. A' 15dik század végén a' több tudományokkal együtt felélедt a' Mathesis is; 's azolta minden pallérozott Nemzetek által miveltetvén, mind tökéletesíttetett, mind gazdagittatott!

TISZTA MATHESIS.

ELSŐ RÉSZ.

Szám-Tudomány (Arithmetica).

Elő-Jegyzetek.

§. 1. Minden külön lévő dolog (individuum) a' vele egy nevűek vagy egy fajták közt tekintve, neveztetik Egynek (unum) annak illyen létele (egységnek), unitas p. o. minden külön garas, a' garasok közt egy, minden külön forint a' forintok között egy. Több egyek öszvevéve formálnak számot (numerus), p. o. hét garas tesz garasok számát, — nyolcz forint tesz forintok számát. — De ugyan azon egy dolog, melly a' vele egy fajták között egy, lehet más fajták között, vagy más fajtákhoz képest szám, p. o. a' forint a' forintokhoz képest egy, de a' garasokhoz képest szám; mert garasoknak sokasága. — Az egy tehát vagy egység nem szám, hanem számalak (elementum numeri), mert ez alakítja vagy alkotja a' számot. —

§. 2. A' számok szem elébe terjesztésére jegyek (characteres, seu symbola) kívántatnak, mellyeket egyezmény szerént lehetne felvenni akármillyeneket. Némelly nemzetek mint a' Görögök, Zsidók a' betű jegyekkel Szám-jegyek gyanánt is éltek, p. o. $\alpha = 1$, $\beta = 2$'s a' t. — A' Rómaiak is az Alphabetum-ból vettek ki egynehány jegyeket a' számok kijelentésére, mint I = egy, V = öt, X = 10, L = 50, C = száz, D vagy IↃ = ötszász, M vagy CIↃ = ezer. Már ha többet jelentőnek jobb felől tétetik kevesebbet, vagy annyit jelentő: akkor azokat öszveszámlálják p. o. VI = hat, XXVI = huszonhat. — Ha pedig a' kevesebbet jelentő bal felől tétetik, akkor az a' többet jelentőből kivétetik, p. o. IV = négy, XL = negyven.

A' Chiniaiaknak csak két szám-jegyök volt, t. i. ezek: 1 és O, mellyekkel akármelly számot előterjesztettek, olly móddal, hogy a' 1 minden bal felé következő helyen két annyit jelentsen, mint a' mellette jobbra lévőn, p. o. 10 = kettő, 11 = három 100 = négy, 101 = öt, — 110 hat, — 111 = hét, — 1000 nyolcz, — 1001 = kilencz, — 1010 = tíz, — 1011 = tizenegy 's a' t. Ezen számolás módját nevezik Kétszerező számolásnak (ratio numerandi dyadica).

Az Arabsok mind ezeknél alkalmatosabb számjegyeket találtak, mellyek máig is közönségesen használtatnak u. m. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. Az ezen jegyekkeli (alább előadandó) számolás módja bár melly rendes és szép: még is több tekintetben hijános és alkalmatlan. Nevezetesen az esmeretlen mennyiség kifejezésére ezek közt nincs semmi jegy; — azonban a' nagy mennyiségeket leírni; annyival inkább a' leírtakat általlátni; még annyival inkább velek dolgozni, nehéz, és hosszas. Hogy ezen fogyatkozásokon segítsenek a' Mathematicusok: felvették számjegyek gyanánt a' Deák Alphabetum apró betűit, olly móddal, hogy az elsőbb betűk a, b, c, d, 's a' t. esmeretes mennyiségeket, a' hátulsok pedig x, y, z, j, v, esmeretleneket jelentsenek. Még pedig a' betűk értekök (valor) nincs meghatározva; hanem akármelly betű jelenthet akármelly mennyiséget; csak hogy a' melly értéket tulajdonítunk valamelly betűnek, azt azon egy számvetésben, végig meg tartja. — Ezen betűkkel való számvetés mesterségét nevezik Algebra-nak (Al Geber nevű Arabs feltalálójától) — vagy Analysisnek, mivel az esmeretlen mennyiségek kifejtésére, kitalálására alkalmatosabb a' számjegyes számvetésnél. Neveztetik még Általános számvetésnek is, (Arithmetica universalis), mivel a' betüknek általános értekök van, az az akármelly mennyiséget jelenthetnek; — vagy betűs számvetésnek (Arithmetica literalis), a' midőn a' közönséges számjegyekkel való számvetés ennek ellenébe tétetvén, neveztetik köz számvetésnek (Arithmetica vulgaris).

§. 3. Ha a' mennyiségeket egymással öszvehasonlítjuk: legelsőben is a' tűnik szemünkbe, hogy azok vagy egyenlők vagy nem egyenlők. A' nem egyenlők közül egyik nagyobb, másik kisebb; a' kisebb mindég benne van a' nagyobbikban és így annak része. Az egyenlőség jegye (signum) két vízerányos egyközű vonal (=) az egyenlők között, p. o. 12 = 2szer 6. mellyet így mondunk ki annyi mint (aequale). A' nemegyenlőségnek jele két hegyre öszve menővonalok, úgy hogy a' nyilás a' nagyobbik felől essék, p. o. 6 > 5, 's így mondjuk ki: 6 nagyobb mint 5, — 4 < 5 négy kisebb mint 5.

§. 4. Ez a' mennyiségek legegyszerűbb öszvehasonlításuk 's egymás eránti viszonjok. Innen indul ki a' Mathesis, — legelől mindjárt előadván némelly egyenlőséget illető nyilvánvalókat (Axiomata) p. o.

1. Az egyenlőket fel lehet egymással cserélni, p. o 12 helyett tehetek kétszer hatot vagy 3szor 4et.

2. Ha két mennyi közül mindegyik egyenlő egy harmadikkal: azon két mennyik egymással is egyenlők, p. o. 60 kr. = 1 for. — 20 garas = 1 for. és így 60 kr. = 20 garas.

3. Ha két egyenlő mennyik közül mindegyikhez ugyan annyit adok, — vagy mindegyikből ugyan annyit veszek el, — vagy mindegyiket ugyan annyiszorta nagyobbítom (ugyan azon számmal szorozom), — vagy mind egyiket annyiszorta kevesítem (ugyan azon számmal elosztom), azoknak egyenlőségök nem változik.

4. Minden egész nagyobb a' maga részénél.

5. Minden egész egyenlő a maga részeivel együtt véve.

§. 5. Némelly nem egyenlő mennyiségeket, ha egymással öszvehasonlítuuk, azt tapasztaljuk, hogy a' kisebbik a' nagyobbikban egynehányszor kereken van meg, vagy más szókkal, ha a' kisebbiket egynehányszor vesszük, kereken kicsinálja a' nagyobbikat; — vagy hogy a' kisebbik a' nagyobbikat maradék nélkül elosztja. Az illyen kisebbet a' nagyobbhoz képpest nevezik Mérő résznek (mensura) vagy Hányados résznek (pars aliquota) p. o. 4nek a' 2, — 8nak a' 2, 4 hányados része. — A' melly kisebb szám pedig a' nagyobbikat, akárhányszor vétetik, sem adja ki kereken: az annak valami részének (pars aliquanta) neveztetik, p. o. 5 a' 12nek valami része. — Ha valamelly kisebb szám, két vagy több nagyobbaknak is mérő részök: az közös mérő (communis mensura), p. o. a' 2 mérő része a' 4nek 8nak 10nek, — a' 3 mérő része a' 6nak, 9nek, 12nek, az 5 mérő része a' 10nek, 15nek 's a' t. — Ha két vagy több nagyobb számnak több Közös mérői vannak: azok közül a' legnagyobbikat nevezik Legnagyobb Közös mérőnek (communis maxima mensura); p. o. 24nek és 36nak közös mérői 2, 3, 4, 6, 12, ezek köztt a' 12 legnagyobb közös mérő. — Azon számok, mellyeknek közös mérőjök van, neveztetnek Egyméértékűeknek (commensurabiles), p. o. 12, 36, 48 egyméértéküek, mert közös mérőjök van u. m. 2, 4, 6; a' mellyeknek nincs közös mérőjök, Másmértékűeknek p. o. 8, 9, (incommensurabiles).

§. 6. A' melly számnak kereken felét lehet venni, neveztetik felesnek vagy párnak (numerus par), p. o. 2, 6, 32, 128 's a' t. — Az ollyan számot, mellynek az 1én kívül más mérője nincs, az az mással el nem lehet osztani kereken, nevezik Egyszerű számnak (numerus simplex vel primus) p. o. 3, 5, 7, 11, 13; — a' mellynek pedig több mérője is van, öszvetett számnak (compositus), p. o. 6, 9, 10, 12 's a' t. — Az ollyan számot, melly a' maga minden mérőivel öszvevéve egyenlő, nevezik Mértéktelő számnak (numerus perfectus) p. o.

$6 = 3 + 2 + 1$. — $28 = 14 + 7 + 4 + 2 + 1$. — $496 = 248 + 124 + 62 + 31 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$. — $8128 = 4064 + 2032 + 1016 + 508 + 254 + 127 + 64 + 32, + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$.

ELSŐ SZAKASZ.

Köz Számvetés (Arithmetica vulgaris.)

ELSŐ CZIKKELY.

Az Arabsszám-jegyekkel élésről.

§. 7. Ha az ember tízig elszámlál, úgy tetszik, mintha egy karikát töltött volna bé, mellyet ezentul szüntelen újra meg újra előkezd. Ha kétszer tölti be: ott előáll a' két tíz, vagy husz; — ha háromszor, a' három tíz vagy harmincz, — így a' négy tíz, 's a' t. ha tízszer betölti: előáll a' száz. Ha ismét az elment úton tízszer kicsinálja a' százat, előáll az ezer, azután a' tízezer, — azután tíztíz ezer, vagy száz ezer, azután tíz száz ezer vagy ezer ezer, vagy millió 's a' t. a' mint ezt már a' gyermekek tanulják.

§. 8. Az Arabs számjegyekkel való élésben, ugyan ezen tízszerező, kerekség uralkodik. Ugyan is a' számjegynek értéke, nem csak formájától, hanem helyétől is függ; mert minden balfelé következő helyen tízszerte jelent többet, mint a' szomszéd jobbfelőli helyen jelentene. Igy p. o. az 5 az első helyen jelent 5 egyet, balra másodikon öt tízet, harmadikon öt százat, negyediken öt ezeret, 5ken öt tíz ezeret, 6ikon öt száz ezeret, 7ikén 5 milliót 's a' t. Ha tehát oszlopokban képzeljük feküìnni a' számjegyeket: e' lessz az oszlopok értéke:

Egyszeresek			Ezresek			Milliosok		
5	5	5	5	5	5	5	5	5
százas	tizes	egyes.	százas	tizes	egyes	százas	tizes	egyes
Ezer Millios			**Billiosok**			**Ezer Billios**		
5	5	5	5	5	5	5	5	5
százas	tizes	egyes	százas	tizes	egyes	százas	tizes	egyes

Ezen számolás módját nevezik Tízszerező számolásnak (ratio numerandi decadica). Ezen számolásban a' helytartónak (zerus) *o* magában ugyan semmi értéke nincs; de a' jelentő Jegyek közt nagy haszna van; mert azokat más helyre taszítván, jelentésöket tízszerte neveli, p. o.

5 = öt egy, de 50 = 5 tíz. 500 = 5 száz.

§. 9. E' szerént a' leírt szám-jegyeknek akármelly hoszszú sorát könnyű kimondani, illy móddal: hogy jobbról bal felé jövén, elosztjuk a' számjegyeket, hármával véve, falkákra (a' balról legutólsóban lehet kettő, vagy egy is) az első falkát a' másodiktól elválasztjuk alólról tett vonással, — a' 2ikat a' 3iktól feljülről tett vonással, — a' 3ikat a' 4iktől ismét alólról, a' 4iket az 5iktől feljülről tett két vonással, 's a' t. Már a' hol alól áll vonás: oda mindég ezeret mondjunk; — a' hol feljül, oda a' vonások száma szerént Milliót ha egy, Billiót ha kettő, Trilliót ha három vonás van 's a' t. Minden falkában pedig a' bal felől első jegy százas, a' 2dik tizes, a' 3dik egyes. P. o.

$$32780,921304,678''310,023'400,213.$$

Harmintz két quadrillio, hét száz nyolczvan ezer, kilencz száz huszon egy trillió, három száz négy ezer, hat száz hetven nyolcz billió, három száz tiz ezer, huszon három millió négy száz ezer, két száz tizenhárom.

§. 10. A' kimondott számokat Jegyekkel leírni szinte könnyü illy móddal:

1. Mivel a' falkák három Jegyei közül a' balfelőli első százat, a' második tizet, a' harmadik egyet jelent: arra kell legelsőben vigyázni, min kezdődik a' kimondott szám? Ha százason kezdődik: ugy az első falka mindjárt három Jegyből áll; de ha tízesen; úgy csak kettőből; ha egyesen, ugy csak egyből. — A' többi falkák pedig mind háromból.

2. Figyelmezni kell, hogy az első falka millios, billios, vagy trillios 's a' t. vagy pedig ezres e? — 's a' szerént kell tenni vonást vagy alól, vagy feljül.

3. Mivel minden falkában három Jegynek kell lenni, t. i. százasnak tizesnek, egyesnek; ha ezek közűl valamellyik hibázna; annak helyét o-val kell betölteni: p. o. huszonhat ezer, két száz öt millio 6 ezer nyolcz száz:

$$= 26,205'006,800.$$

MÁSODIK CZIKKELY.

A' számok változásairól, 's a' négy számvetési munkákról (Algorithmi).

§. 11. Minden mennyiséget, és így a' számot is kétképpen lehet változtatni, u. m. vagy szaporítani, vagy kevesíteni. Ismét mind a' szaporítás, mind a' kevesítés kétképpen történhető, u. m.

1. Ha két vagy több egy fajta, de nem egyenlő mennyiségek öszveszedődnek. — Ez a' munka neveztetik Öszvezésnek (Additio).

2. Ha ugyan azon Mennyiség maga magához többször adatik. Ez a' munka neveztetik: Szorozásnak (Multiplicatio).

3. Ha valamelly kissebb mennyiség, egy azon fajta na-

gyobb mennyiségből egyszer kivétetik: ez a' munka neveztetik Kivonásnak (subtractio).

4. Ha valamelly kisebb mennyiség a' nagyobbikból annyiszor vétetik ki, a' hányszor meg van benne: ez a' munka neveztetik Osztásnak (Divisio).

Ezen négy számolási munkák: Öszvezés, Kivonás, Szorozás, Osztás, Arabs eredetű névvel Algorithmusoknak neveztetnek. —

1ször Öszvezés.

§. 12. Az öszvezés, ollyan számolási munka, melly által több kiadott számokat, mint Részeket egy Egészbe öszveszedünk; — vagy keresünk egy ollyan számot, melly maga egyenlő legyen a' több kiadott számokkal öszvevéve. — A' kiadott számokat tehát nevezzük Részeknek (Addendi), a' keresettet pedig Egésznek vagy Öszvezetnek (Summa, Agregatum). — Az öszveadandó részeknek egy fajtáknak kell lenniek. — Az öszvezés' Jele egy függőleg álló kereszt (+) a' részek között; mellyet igy mondunk ki: meg (plus), p. o. 5 + 17 + 3, öt meg tizenhét meg három = 25. —

§. 13. Az öszvezés munkája igy megy véghez:

1. A' részek egymás mellé iratnak, ugy hogy egyesek egyesek alá, tizesek tizesek alá, 's a' t. essenek; 's alattok vonal húzatik, hogy az öszvezettel a' részek öszve ne zavartassanak.

2. Az egyesek öszveszámláltatván, ha azoknak summáját egy Jeggyel le lehet irni: az, az egyesek alá iratik; ha kettővel lehet le irni, akkor csak a' jobbra eső jegy iratik az egyesek alá, a' másik pedig a' következő oszlophoz, a' tizesekhez számittatik, mivel tizest jelent; ha hárommal lehetne le irni; akkor is a' balfelőli kettőt a' tizesekhez számitjuk. — Öszveadjuk tehát másodszor a' tizeseket; 's ha a' summát egy jeggyel leirhatni; azt irjuk a' tizesek alá; ha kettővel: ugy a' bal felől valót adjuk a' százasokhoz: így cselekszünk a' százasokkal, ezresekkel 's a' t. —

3. Próbája az öszvezésnek az, ha a' munkát megújitjuk, — még pedig ha először az oszlopokon felfelé mentünk; már másodszor lefelé jöjjünk: ha ugyanannyi jön ki; nincs hiba az öszvezésben. (A' 9-ek kihányásáról szóval).

Jegyzék. Gyakorolni kell magát a' kezdőnek az észbeli összvezésben, — a' midőn megforditva, a' nagyobbakról jövünk a' kisebbekre; — gyakorolni kell az egyenlőkhöz, egyenlők adásában. p. o.

$$\begin{array}{rcl} 2+7+3 & = & 9+3 \\ 4+5 & = & 7+2 \\ \hline 2+7+3+4+5 & = & 9+3+7+2 \\ 21 & = & 21 \end{array}$$

2szor Kivonás.

§. 14. A' kivonás ollyan számvetési munka, melly által egy nagyobb mennyiségből, egy kisebbet kiveszünk egyszer, azért, hogy a' kettő közti külömbséget megtudjuk; vagy keressünk egy ollyan mennyiséget, melly két kiadott nem egyenlő mennyiségek közti külömbséget megmutassa. — A' kivonásban tehát három menyiség van: t. i. kettő kiadott, a' harmadik keresett. A' kiadottak közűl a' nagyobbik, annyi mint a' kiadott kisebbik, a' keresettel együtt. És igy a' kiadott nagyobbikat úgy nézhetjük, mint Egészet, a' kiadott kisebbet, és keresettet pedig ugy, mint annak öszveállitó Részeit. A' honnan, ha a' kisebb kiadottat, a' keresett harmadikkal öszveadjuk: kijön a' kiadott nagyobbik. Igy is lehetne tehát a' kivonást meghatározni: A' kivonás ollyan számvetési munka, mellyben kiadatik egy Egész, és annak egy része, keressük pedig a' másik részét. — A' három számok neveik ezek: adott nagyobb v. Egész (Minuendus), adott kisebb vagy adott Rész (Subtrahendus). — Keresett Rész vagy Külömbség vagy Maradék vagy Pótlék (Differentia, residuum). Az egésznek és részeknek egy fajtáknak kell lenniek. A' kivonás Jele egy vizerányos vonal, a' nagyobb és kisebb között, mellyet igy mondunk ki; kivéve (minus); p. o. $5 - 3 = 2$ öt kivéve hármat annyi mint kettő. Gyakran nem látjuk könnyen által, mi a' külömbség két mennyiség közt: de ezen jellel mindjárt kijelenthetjük, 's hirtelen dolgozhatunk, p. o. $a - b$ jelenti az a és b közti külömbséget, $2381 - 1003 =$ a' kettő közti külömbség.

§. 15. A' kivonás munkája igy megy véghez:

1. Leirván a' kisebbet a' nagyobb alá, 's vonalat huzván alájok, kezdődik a' kivonás az egyeseken, — azután követ-

keznek a' tizesek, százasok 's a' t.; a' maradék a' megfelelő oszlop alá iratik. —

2. Ha a' felső jegy az alsóval egyenlő: akkor a' maradékba *0* jön. Ha pedig a' felső jegy kisebb, mint az alsó: akkor az előtte való oszlopból egyet általhozunk, melly itt tizet tesz.

3. Ha pedig a' következőben, vagy több következő oszlopokban is Helytartó volna: akkor mind addig megyünk, mig jelentő jegyet nem találunk, 's attól egyet elvévén, a' közbe eső Helytartók 9-é válnak — 's a' legutólsó oszlopba jön tiz. p. o.

20,003
15,615

a' tizezres oszlopból vehetek egyet, melly az egyesek oszlopában tenne tizezret; de annyira nincs szükségem: tehát kilencz ezret hagyok az ezres oszlopban, 's még marad ezer — ebből kilenczszázat hagyok a' százas oszlopban, még marad száz — ebből kilentz tizet hagyok a' tizes oszlopban: 's igy csak tizet hozok az egyesek oszlopába.

4. Próbája a' kivonásnak az öszvezés, t. i. ha az adott kisebbik, a' maradékkal öszveadatván kiadja a' nagyobbikat: nincs hiba a' kivonásban.

Jegyzék. Az öszvezés és kivonás megegyeznek egymással annyiban, hogy mindenikben Egész és Részek forognak fenn. Külömböznek pedig annyiban, hogy az öszvezésben Részek adatnak ki, 's Egész kerestetik; — a' kivonásban pedig kiadatik az Egész 's egy Rész, — kerestetik pedig a' Pótló Rész. — Valamint hát a' kivonásnak próbája a' öszvezés; ugy az öszvezésnek a' kivonás, t. i. ha a' részek egymás után kivonatván a' summából, ott semmi se marad: jól volt az öszvezés.

3szor Szorozás.

§. 16. A' szorozás ollyan számvetési munka, melly által valamelly számot magát magához adunk, egynehányszor; vagy melly által két kiadott számok közül az egyiket, akármellyiket annyiszor vesszük, a' hány egy van a' másikban; — vagy melly által keresünk egy ollyan harmadik számot, mellyben két kiadottak közül, akármellyik annyiszor legyen meg, a' hány egy van a' másikban. A' két kiadottak neveztetnek Szorozóknak (Factores), a' keresett pedig Szorozat-nak (Factum). — A' szorozás jele hajlott kereszt ($\times$) vagy egy pont ($\cdot$), a' szorozók között, p. o. $12 \times 3 = 36$; —

12 . 3 = 36, 's így mondják ki: tizenkettő háromszor (duodecim ductum in tria). — A' szorozók nem egy fajták, nem is lehetnek; mert ha az egyik, Tárgyas mennyiség, a' másiknak Elvontnak kell lenni; — p. o. három krajczárt négy krajczárszor nem lehet venni, hanem 4szer tisztán.

§. 17. A' szorozás munkája így megy véghez. —

1. A' kilencz egyes számok szorozását gyakorlásból kell megtanulni. — Segitségül lehet a' Pythagorás táblája.

2. A' tízen feljül valók szorozására ezeket tartsuk meg:

a. Ha az egyik szorozó egy Jegyből áll: — írjuk le azt a' másik szorozó egyes oszlopa alá, 's szorozzuk vele annak minden Jegyeit; — 's a' mi kijön, írjuk le a' vonal alá, hogy az egyes, a' felső szorozónak egyese alá, a *tízes*, a' *tízese* alá, 's a' t. — essenek. Ha *pedig* valamelly szorozatot, egy jeggyel nem lehet leírni: akkor csak a' balfelőli írassék le az illető helyre, a' többieket pedig a' következő szorozathoz kell számlálni. —

b. Ha mind a' két szorozó több jegyekből áll: külön mindenik Jeggyel kell azt cselekedni, a' mit az egy Jegyről mondánk. De arra kell vigyázni, hogy mindenik Jeggyel lejendő szorozatot, az alsó szorozó Jegye alatt kell kezdeni. Végre a' külön szorozatokat öszve kell adni, 's ezen summa lessz a' kívánt fő szorozat.

§. 18. Némelly munka-könyítések a' szorozásban:

1. Ha vagy egyik vagy mind a' két szorozó végén, egy vagy több *o* van: azokat el lehet hagyni; 's csak a' jelentő Jegyekkel kell szorozni, de a' fő szorozat után annyi *o*-t kell tenni; a' hány volt a' két szorozókban együttvéve.

2. Ha az alsó szorozóban középen fordulnak elő *o* k: azokkal sem kell szorozni, csak arra kell vigyázni, hogy a' következő Jegy szorozatja ő alatta kezdődjék.

Jegyzék. A' szorozás próbájárul hátrább.

4szer Osztás.

§. 19. Az Osztás ollyan számvetési munka, melly által, egy adott nagyobb mennyiségből egy adott kisebbet elveszünk annyiszor, a' hányszor elvehetünk; vagy azt nézzük, hogy a' kisebbiket a' nagyobbikban hányszor találjuk meg; — vagy keresünk egy ollyan harmadik számot, melly azt mutassa, hogy a' két kiadottak közül a' kisebbik hányszor van meg a' nagyobbikban. — A' kiadott nagyobb neveztetik Osztandónak (Dividendus), a' kiadott kisebb Osztónak (Divisor) — a' harmadik kereset pedig, Hányadosnak (Quotus vagy Quotiens). — Az osztó tehát az osztandóban annyiszor van meg, a' hány egy van a' Hányadosban. És viszont a' Hányados az osztandóban annyiszor van meg, a' hány egy van az osztóban. Innen az osztót és a' hányadost, úgy lehet nézni: mint Szorozókat, az osztandót pedig mint Szorozatot. — Az osztást tehát így is lehetne meghatározni: Ollyan számvetési munka, mellyben kiadatik a' Szorozat, és egyik Szorozó; keressük a' másik Szorozót. — 'S viszont figyelmezni kell reá, hogy ha valamelly Szorozatot az egyik Szorozóval elosztunk: kijön a' másik Szorozó. Az osztás Jele két pont, az osztandó, és osztó közt, úgy hogy, az osztandó bal felől álljon, p. o. 12 : 3. — vagy egy vonal; mellynek felette az osztandó, alatta az osztó áll, így: $\frac{12}{3}$.

§. 20. Az osztás Tagjainak változtatásáról.

1. Ha az osztó megmaradván, az osztandót neveljük: nagyobbodik a' Hányados is.

2. Ha az osztó megmaradván, az osztandót kevesítjük: kisebbedik a' hányados is.

3. Ha az osztandó maradván, az osztót neveljük: kevesedik a' Hányados; mert ugyan azon szorozatnak minél nagyobb az egyik szorozója, annál kisebb a' másik; — éppen azért

4. Ha az osztandó maradván, az osztót kevesítjük: nagyobbodik a' Hányados.

5. Ha mind az osztót, mind az osztandót ugyan annyiszorta neveljük, az az épen azon számmal szorozzuk: a' Hányados nem változik. Mert, midőn az osztandó nevekedett: akkor a' Hányados is nevekedett; de midőn az osztó nevekedett, akkor a' Hányados kisebbedett: már ha ugyan annyit nevekedett, mint a' mennyit kissebbedett, látni való, hogy nem változott. —

6. Hasonlóképpen ha mind az osztót, mind az oztandót ugyan annyiszorta kevesítjük, vagy ugyan azon számmal elosztjuk: a' Hányados nem változik; — mert, kissebbedvén az osztandó, kissebbedik a' Hányados; de kisseb-

bedvén az osztó: nevekedik a' Hányados. Ha már ugyan annyit kissebbedik, a' mennyit nevekedik: látni való, hogy nem változik.

§. 21. Az osztás munkája így megy véghez:

1. Az osztandó két vonal közzé iratik; e' mellett bal felől az osztó, 's jobb felől a' Hányados lesz.

2. Az osztót keressük az osztandónak balfelőli első Jegyében, 's ha abban nem találtatik, két vagy három 's a' t. első Jegyeiben; a' Hányadost írjuk jobb oldalra; 's ezzel szorozván az osztót, a' szorozatot az elosztott Jegyekből kivesszük. — Ha maradék van, ahoz; ha pedig nincs, csak magát lehozzuk az osztandó következő Jegyét, 's abban is keressük az osztót; a' Hányadost helyére írjuk, — vele szorozzuk az osztót, 's az osztott Jegyekből kivesszük a' szorozatot; — a' maradékhoz ismét új Jegyet hozunk, 's a' leírt munkát folytatjuk.

2. Ha a' lehozott Jegyben az osztó meg nem találtatnék: akkor a' Hányadosba 0-t írunk, 's új osztandó Jegyet hozunk le, 's így folytatjuk az osztást.

4. Ha a' legutolsó osztás, és szorozat kivonás után is marad fenn valami: jele hogy az osztandónak az osztó nem Mérőrésze. — Egyébbaránt a' szokott jellel ki kell jelenteni, hogy a' maradékot is az osztóval elosztjuk, így $\frac{2}{8}$.

5. Próbája az osztásnak a' szorozás; t. i. ha az osztó a' Hányadossal szoroztatván kiadja az osztandót; jól ment a' munka. — Meg lehet próbálni az osztást ugy is, ha az osztandót a' Hányadossal osztjuk el; 's ha ekkor az osztó kijön; jól dolgoztunk. Viszont a' szorozásnak próbája az osztás; t. i. ha a' szorozat, az egyik szorozóval elosztatván, kijön a' másik szorozó; jól ment a' munka.

§. 22. Munka-rövidítések az osztásban.

1. Ha mind az osztóban, mind az osztandóban, egy vagy több Helytartók vannak: egyenlő számú Helytartókat el kell hagyni mindenikből; 's a' maradt számokkal kell az osztást véghez vinni; a' Hányados ugyan az lesz, a' mi lenne, ha a' Helytartókat el nem hagynánk. Mert ha mind az osztót, mind az osztandót egyenlően kevesítjük: a' hányados nem változik. Már pedig ha mind kettőnek végéről egy egy Jegyet elhagyok: az annyit tesz, mintha mind kettőt tízzel elosztanám; mert valóban mindenik tízszerte fog kevesebb lenni;

ha mindenik végéről két két jegyet hagyunk el: az annyit tesz, mintha mindeniket százzal elosztanánk, 's a' t. — És mivel most mindeniknek végén Helytartók voltak: kereken lehet őket elosztani tízzel, százzal, 's a' t.

2. Ha pedig csak az osztó végén van, vagy vannak Helytartók: akkor kétféleképpen lehet a' munkát könyíteni: u. m.

a. Úgy, ha az osztóból a' Helytartókat elhagyván, az osztandó végéről is ugyan annyi szám-jegyeket elrekesztünk; 's csak a' maradt jegyeket osztjuk el az osztó maradt jegyeivel; de a' munka végével az elrekesztett jegyeknek az egész osztót alá írjuk, azt jelentvén ki, hogy azokat is el kell osztani. Itt is látni való, hogy ugyan azt cselekedtük, a' mit az elébbeni esetben; t. i. mind az osztót, mind az osztandót egyformán kevesítettük: és így a' Hányados nem változott.

b. Vagy pedig csak az osztó végéről hagyjuk el a' Helytartókat, és azzal, a' mi meg maradt, elosztjuk az egész osztandót. Most látni való, hogy nem jöhet ki ollyan Hányados, a' millyen jött volna a' Helytartó elhagyása nélkül. Mert megmaradván az osztandó, a' hányszorta kevesedett az osztó; annyiszorta nevekedett a' Hányados. — Ha tehát az osztóból egy Helytartó maradt el, — vagy is ha az, tízszerte kevesedett: úgy a' Hányados tízszerte nagyobb, mint kellene lenni; ha két Helytartó maradt el az osztóból: a' Hányados százszorta nagyobb kelletinél. — Ekkor tehát, ha a' Hányados tízszerte nagyobb kelletinél, hogy helyessé légyen, tízszerte kevesebbé kell tenni, melly úgy esik meg, ha a' végirül egy Jegyet elrekesztünk, 's a' lesz tizedrész, a' többi egész; — ha pedig százszorta nagyobb: akkor százzal kell elosztani, vagy is a' végéről két Jegyet hagyni el, 's a' lesz század rész, a' többi egész. Egy szóval, a' hány helytartót hagyunk el az osztóból, annyi Jegyet kell elrekeszteni a' Hányados végéről, 's csak az ezeken kívül valók lesznek egészek; ezek pedig, tized, század, vagy ezered 's a' t. részek, p. o.

$$
\begin{array}{r|r|l|l}
200 & 6854 & 34 + 54 & \\
\hline
 & & 200 & \frac{54}{200} = \frac{27}{100}
\end{array}
$$

§. 23. A' Szorozás és Osztás megegyeznek annyiban, hogy mindenikben szorozók, és szorozat forog fenn. Külömböznek pedig annyiban, hogy a' szorozásban kiadatnak a' szorozók, kerestetik a' szorozat; az osztásban pedig kiadatik a' szorozat, és az egyik szorozó, — kerestetik a' másik szorozó.

§. 24. A' Mathematicusoknak gyakran szükségök van arra, hogy valamelly mennyiséget, más formában fejezzenek ki. Ez megeshetik négyféleképpen:

1. Vagy úgy nézik azon mennyiséget, mint Egészet 's kifejezik azt Részekkel, p. o. $\frac{34}{}$, részekkel kifejezve lehet, $30 + 4$, vagy $10 + 24$, 's a' t. sokféleképpen.

2. Vagy úgy tekintik azt, mint külömbséget; felvesznek tehát tetszésök szerént egy nagyobb számot, 's ahoz illő kissebbet, úgy hogy az adott szám ezen kettő közti külömbség legyen, p. o. $34 = 60 - 26$, vagy $50 - 16$'s a' t.

3. Vagy úgy tekintik azt, mint szorozatot 's ki fejezik szorozókkal, úgy hogy tetszésök szerént felvesznek akármelly számot, egyik szorozónak; a' másikat pedig megtalálják, ha a' felvett szorozóval a' szorozatot, t. i. az adott számot, elosztják; p. o. $34 = 17 \times 2, = 10 \times 3\frac{4}{10} = 60 \times \frac{34}{60}$'s a' t.

4. Vagy ugy tekintik azt, mint Hányadost, a' midőn felvesznek tetszésök szerént egy nagyobb számot mint osztandót, 's ahoz keresnek ollyan osztót, mellyel ha elosztatik: a' hányados épen az adott szám legyen. Illyen osztót pedig úgy találunk, ha a' felvett osztandót, vagy szorozatot az adott számmal, mint egyik szorozóval elosztjuk, p. o. $\frac{34}{}$ az adott szám; osztandó legyen 102. Osztó kijön, ha $\frac{102}{}$t $\frac{34}{}$el elosztom, $= 3$; és igy $34 = \frac{102}{3}$ másképen $34 = 156 : \frac{156}{34}$. Vagy pedig osztónak veszünk fel valamit, és keresünk osztandót, szorozván az adott számmal a' felvett osztót, p. o. $\frac{34}{}$ helyett lesz, osztóul vévén $\frac{7}{}$et, $7 \times 34 = 238$, $34 = \frac{238}{7}$.

HARMADIK CZIKKELY.

A' különfajta, de egy fajtára vehető mennyiségek körülti számvetési munkákról.

§. 25. A' ki az illyen számokkal akar bánni: annak tudni kell, hogy a' kissebb fajtábul hány egy teszen, a' nagyobb fajtából egyet. Lássunk egynehány példát:

1. A' hoszszuság köz mértékei:

Egy öl	=	6 láb (pes)
— láb	=	12 hüvelyk (digitus)
— hüvelyk	=	12 vonal (linea)
— vonal	=	12 pont.

2. Kereskedési mértékek.

Egy mázsa	=	100 font (libra)
— font	=	32 lat (semuncia)
— lat	=	4 nehezék (drachma).

3. Patikai mértékek.

Egy font	=	12 uncia
— uncia	=	8 drachma
— drachma	=	3 scrupulus
— scrupulus	=	20 gran.

4. Idő - felosztás.

Egy esztendő	=	365 $\frac{1}{4}$ nap
— nap	=	24 óra
— óra	=	60 első percz
— első percz	=	60 másod percz.

5. Geographiai mértékek.

Egy geographiai mértföld	=	4,000 öl
— német mértföld	=	4,000 öl
— magyar mértföld	=	6,000 öl.

6. Pénz-értékek.

Egy császári arany	=	4 for. 30 kr. p. p.
— souveraindor	=	13 for. 20 kr. —
— koronás tallér	=	2 for. 12 kr. —
— conventiós tallér	=	2 for. —
— forint	=	20 garas.
— garas	=	3 krajczár.

§. 26. Az illyen számokkal megeshetne a' számvetési munka ugy is, ha a' nagyobb fajokat, a' legkissebb fajjá változtatnók; 's azzal véghez vívén a' szokott munkát, ismét a' kis fajbúl nagyobb fajokat csinálnánk. De lehet körültök más módon is munkálódni; nevezetesen.

1) Az Öszvezés mehet igy:

1. Az egy fajtákat egymás alá írjuk, p. o. krajczárt, krajczár alá, garast garas alá.

2. Elkezdvén a' legalsó fajon, azt öszveadjuk, 's a' hány következő felsőbbi faj kitelik belőle, azt ahoz adjuk; 's ezen kis faj alá csak a' maradékot irjuk. —

2) A' Kivonás mehet igy:

1. Leírjuk a' fajokat egymás alá. —

2. A' legkissebbik fajon kezdjük a' Kivonást. De ha az alsó nagyobb, mint a' felső: elveszüuk a' előtte való fajból egyet, melliyet osztán tudnunk kell, hogy itt hányat teszen, p. o. 2 for. 5 garas
1 for. 15 garas
———————
0 for. 10 garas.

3) A' Szorozás mehet igy:

1. A' szorozóval végig kell szorozni minden fajokat, akár a' nagyobbikon, akár a' kissebbiken kezdve.

2. Miután minden fajok szorozatja készen van: a' kissebb fajok szorozatjából, nagyobbakat kell csinálni, 's azokhoz adni mint az öszvezésben.

4) Az Osztás igy mehet:

1. Kezdődjék az osztás a' legnagyobb fajon; 's jegyeztessék fel ennek Hányadosa.

2. Ha maradék van: az változtassék a' következő kissebb fajjá, 's a' hoz adassék; az ismét igy osztassék el; az utolsó maradék a' legkisebb fajból lesz: — 's annak irassék alá az osztó. p. o.

				Hányados
4	5 for.,	9 garas,	2 kr.	1 for., 7 gar., 1 kr. $\frac{1}{4}$ kr.
	4	29	5 kr.	
	1	28	4	
		1	1	

MÁSODIK SZAKASZ.

Betűs-Számvetés (Algebra).

ELSŐ CZIKKELY.

Elő-Jegyzetek.

Jegyzék. Mi légyen az Algebra? mi értekök légyen a' betüknek, láttuk feljebb.

§. 1. Két ollyan mennyiségek, mellyek közűl az egyik, a' feltett kérdésnek, vagy czélnak hasznára, vagy szaporitására, — a' másik pedig annak kárára, kevesitésére szolgál; egymáshoz képest neveztetnek Ellenkező Mennyiségeknek (quantitates oppositae vel contrariae); még pedig az, a' melly a' feltett czélnak szaporitására szolgál, neveztetik Tettleges; — a' melly pedig kárára, Nemleges mennyiségnek; amaz deákúl, quantitas positiva, ez negativa, p. o. Ha napkelet felé van czélom utazni: ebben az esetben, minden napkelet felé tett lépésem Tettleges mennyiség (positiva), és minden napnyugot felé tett lépésem Nemleges mennyiség (negativa). Ellenben ha napnyugot felé van czélom utazni: ebben az esetben a' napkelet felé tett lépéseim nemlegesek, a' napnyugot felé tettek pedig, Tettlegesek. Hasonlóképpen, ha azt akarom megtudni: mennyi tulajdonom van? ezen czélhoz képest, a' készpénzem, és a' mivel más nekem tartozik, az mind Tettleges mennyiség (Positiva), — a' mivel pedig én tartozom másnak, az mind Nemleges (Negativa). Ellenben ha azt akarom megtudni, mennyi az adósságom? ezen czélhoz képest a' kész pénzem, 's a' mivel más nekem tartozik, az Nemleges (Negativa); — a' mivel pedig én tartozom másnak az mind Tettleges mennyiség (Positiva).

E' szerént akármelly Mennyiség magában tekintve se nem Tettleges, se nem Nemleges: hanem a' czélhoz képest lehet az vagy Tettleges vagy Nemleges.

A' Tettleges Mennyiség Jele az, a' mi az öszvezésé (+): mivel az a' czélzott tárgyat szaporítja, 's igy mondják ki: plus, több $+a+b+c$, — a' Nemlegesnek pedig Jele az, a' mi a' kivonásé (—); mivel az a' czélzott tárgyat kevesíti, — 's igy mondják ki: minus, kevesebb, — a — b — c. — A' (+) Jel legelől nem tétetik ki, csak alatta értetik; de a' (—) mindég kitétetik.

§. 2. Az ellenkező Mennyiségek ha egyenlők, egymást egészen lerontják, p. o. + 100 — 100 = 0; ha pedig nem egyenlők, akkor a' kisebbik a' nagyobbikból leront annyit, a' mennyit ér; 's a' maradék lesz annak Jelével, a' mellyből maradott.

Az ellenkező Mennyiségek közt közép helyen van tehát a' *o*; attól egy felé nőnek a' Tettlegesek, más felé a' Nemlegesek; p. o.

$5 + 4 + 3 + 2 + 1,\ 0 - 1 - 2 - 3 - 4 - 5.$

Jegyzék. A' Betűs számvetésben ugyan azon Jelek vannak, mellyek a' köz számvetésben; de a' szorozás Jele rendesen elhagyatik; 's ha a' Betük minden Jel nélkül öszveiratnak, az azt teszi, hogy azok egy-mással szorozva vannak, p. o.

$abc = a \times b \times c$, — $aaa = a \times a \times a$.

§. 3. A' Betűs Számvetésekben gyakran a' Betük mellett vagy jobbról vagy balról számjegy is áll; a' balról állót nevezik Öszvezőnek (Coëfficiens), a' jobbról állót Rangjelnek (Exponens).

1. Az Öszvező azt jelenti, hogy azon egy jel alatt álló egész Mennyiséget, mellynek ő előtte áll, annyiszor kell venni öszveadás által, a' maga jelével, a' hány egy van az Öszvezőben; p. o. $+ 3abc$ azt teszi, hogy az abc-t a' maga + jelével háromszor kell venni, mintha igy volna leirva: $abc + abc + abc$. — Hasonlóul, — $3abc$ azt teszi hogy a' — abc-t 3szor kellene leirni a' maga — jelével, igy: $- abc - abc - abc$. Igy tehát az öszvező csak munka-könnyitésre szolgál, hogy ugyan azon mennyiséget ne kelljen sokszor leirni. Ha Öszvező nincs a' Betük előtt, az egyet mindég oda értjük.

2. A' Rangjel (Exponens) azt jelenti, hogy az egy betű, mellynek ő jobbja felől áll, annyiszor van maga magával szorozva, a' hány egy van a' Rangjelben, p. o. a^3 azt teszi, hogy az *a* háromszor van maga magával szorozva, vagy is háromszor kellene leirni szorozás által, igy: $a \times a \times a$, vagy a. a. a, vagy csak *aaa*. — A' Rangjel is tehát munka rövidítésre szolgál, hogy valamelly Betüt ne kelljen többször irni le szorozással. — Ha Rangjel nincs irva a' Betű jobbjára: az egyet mindég oda értjük.

Minden Mennyiséget magában tekintve neveznek Gyökérnek vagy Első rangnak (Potentia prima), ha ezt magát magával szorozzuk, vagy is kétszer irjuk le szorozásképpen, azt igy mondjuk ki: Másod rangra emelni (elevare ad secundam potentiam); az innen kijövő szorozatot nevezzük a' Gyökér Másod-rangjának, vagy másként Négylegének (Quadratum). Ha a' Négyleget ismét a' Gyökérrel szorozzuk, — vagy is ha a' Gyökeret háromszor teszszük szorozásképpen, az innen származó szorozat neveztetik Harmad-rangnak (tertia potentia), vagy koczkának (cubus). Ha a' koczkát szorozzuk a' Gyökérrel, onnan származik Negyedrang, vagy kettős négyleg (Biquadratum) 's a' t., p. o. a = gyökér, — $a \times a = a^2$ Négyleg, vagy 2dik rang; — $a \times a \times a = a^3$ Koczka vagy 3dik rang; — $a \times a \times a \times a = a^4$ Kettős négyleg 's a' t. — A' Rangjel tehát azt mutatja, hanyadik Rangra van valamelly Gyökér emelve. (Láss bővebben alább a' Rangokról).

Az öszvező tehát és a' Rangjel ezekben külömböznek egymástól.

1. Az öszvező balról, a' Rangjel jobbról tétetik.

2. Az öszvező mind azon Betűkre tartozik, mellyeknek baljokra iratik, a' Rangjel pedig csak arra az egy Betűre, mellynek jobbján áll.

3. Az öszvező azt jelenti, hogy azon Mennyiséget öszvezés által kell egynehányszor venni; — a' Rangjel pedig azt, hogy azon egy Betűt magát magával kell egynehányszor szorozni: p. o. abc^3 annyit tesz, mint $abccc$; de $3abc = abc + abc + abc$; — igy $2a = a + a$ de $a^2 = a \times a$. Ha tehát az a tenne 5-t úgy $2a = 10$; de $a^2 = 25$.

§. 4. Minden egy Jel alatt álló Mennyiség akár egy Betűből, akár többől álljon, neveztetik Tagnak (Terminus), p. o. $+a$, vagy $+3abc^2$, vagy $-ab$.

A' melly Mennyiség egy Tagból áll, neveztetik Egytagúnak (Quantitas Mononmia, vel Incomplexa), p. o. a, vagy $-2ab$, vagy $3ac^2$; — a' melly pedig több Tagokból áll: Több tagúnak (Quantitas Polynomia, vel Complexa), p. o. $2ab - 3b^2c$; még pedig a' kéttagú Binomiának $a+b$; ha három tagú Trinomiának $a+b+c$ vagy $-2ab-3cd+e$.

Jegyzék. Ha valamelly Öszvező vagy Rangjel, vagy akármelly jel több Tagokra is vitetik: néha azt nem irják minden Tag mellé; hanem a' Tagokat Parenthesisbe teszik, vagy Lineát huznak felibök, 's a' Jelt csak egyszer irják le mellé, p. o.

$$3(a+b+c) = 3a+3b+3c,$$

vagy: $\overline{3\,a+b+c}$; igy $(a+b+c)^2$, azt teszi, hogy ezt a' három tagból álló mennyiséget kell másod rangra emelni; — igy:

$$(a+b)\times e = ae+be \text{ 's a' t.}$$

§. 5. A' melly tagokban az alapos mennyiség ugyan az; ha szinte egyik tag azt a' mennyiséget többször kivánja is vétetni, mint a' másik; és ha szinte az egyik tag Tettleges, a' másik Nemleges is: azok neveztetnek Egyfajta Tagoknak (Termini homogenei). Arra tehát, hogy a' tagok egyfajták légyenek, a' kivántatik, hogy azokban éppen azok a' betük, és azon betük felett, épen azon Rangjelek légyenek; de az öszvezők és a' jelek (+ —) lehetnek külömbözők, p. o. legyen $a=2$, $b=3$, $c=4$: lesz $abc=24$: ezzel egy fajta $+2abc$, mert ebben is ugyan csak a' 24 az alapos mennyiség, csak hogy kétszer véve; hasonlóúl — $10abc+5abc$'s a' t. De már ha vagy a' betük nem ugyanazok; vagy ha ugyan-azok is, de a' Rangjelek külömbözők: akkor a' tagok Különfajták (Termini Heterogenei); mert az alapos mennyiség bennök nem ugyan-az, p. o. ab, a^2b, — abc különfajták, mert $ab=6$, $a^2b=12$; igy

$$ab+2ab-3ab+12ab = \text{Egyfajták}; —$$

$$ab+ab^2+a^2b+a^3b^2+ac = \text{Különfajták.}$$

MÁSODIK CZIKKELY.

Az Algebrai négy számvetési mnnkákról.

1ször Öszvezés.

§. 6. Az algebrai Öszvezés nem egyéb, mint az egy fajta tagoknak öszveszedése, hogy külön helyeket ne foglaljanak, p. o. $ab+4ab+3ab=8ab$. Innen önként folynak ezen szabályok:

1. Csak az egyfajta tagokat lehet öszveadni.

2. Csak az öszvezőket adjuk öszve, a' betük ugyan azok maradnak.

3. Ha az egyfajta tagoknak ugyan azon jelök van: öszveadjuk az öszvezőket; és a' summa jele a' lesz a' mi volt

a' részeké; mert a' tettleges részekből, tettleges egész, a' nemleges részekből, nemleges egész lesz, p. o.

$ab + 3ab + 2ab = 6ab$; $-2c - 3c = -5c$.

4. Ha az egyfajta tagok jelei ellenkezők: a' kissebbik tag a' nagyobbikból lеront annyit, a' mennyit ér; és igy a' kissebbik öszvezőjét ki kell venni a' nagyobbikéból, — 's a' maradék lesz a' summának, vagy is inkább külömbségnek öszvezője; jele pedig lesz az, a' mi volt a' nagyobbik tagé, p o. $5ab - 2ab = 3ab$; igy $-5ab + 2ab = -3ab$; igy $2ab + 3ab - 4ab = ab$; igy $8ab - 10ab + 2ab - 3ab = -3ab$.

5. Ha az ellenkező tagok öszvezői egyenlők: azok egymást lerontják, 's a' summából kimaradnak.

6. Ha vannak különfajta tagok is; azokat a' magok jelökket le kell irni a' summában.

Példák:

$$3ad - 2ac + 3d + 5ad - 5ac$$

Summa: $8ad - 7ac + 3d$

Más: $2ab - 3c^2d + 4a^2b - 2c + 3c^2d - 3c - 7a^2b + 3b$.

Summa: $2ab - 3a^2b - 5c + 3b$.

2szor Kivonás.

§. 7. A' kivonás egyszerű szabályai ezek:

1. Azon tagok, mellyekből ki kell vonni, irassanak feljül; azok pedig, mellyeket ki kell vonni, alájok.

2. Az alsó tagok Jelei változtassanak ellenkezőkre, a' + legyen —sá, a' — pedig +sá.

3. Ekkor csak Öszvezést kell csinálni, a' közelebb előadott szabályok szerint. És a' mi itt kijön, a' lesz a' felső és alsó sorban lévő Mennyiségek közti külömbség; melly is hogy helyes Külömbség, nyilván van onnan, mert ha ez az alsó sorbéli mennyiséggel öszveadatik, kiadja a' felső sorbélit, p. o.

$$\begin{array}{rrrrl} 2ab & +\ 3bc & -\ 2a & +\ 4a^2 & = \text{Minuendus} \\ -\ 3ab & +\ 2bc & -\ 2a & +\ 3a^2 & \text{Subtrahendus} \\ + & - & + & - & \\ \hline 5ab & +\ bc & \ldots\ldots & +\ a^2 & \text{Residuum} \\ \hline 2ab & +\ 3bc & -\ 2a & +\ 4a^2 & - \text{Próba.} \end{array}$$

§. 8. Miért kell a' Kivonandó Jelét ellenkezőre változtatni, 's úgy öszveadni? erre nézve jegyezzük meg:

1. A' kivonásban mindég azt akarjuk megtudni, mennyit kell adni az alsó Mennyiséghez, hogy annyi legyen mint a' felső?

2. Midőn ellenkező Mennyiségek forognak fenn: ezen kérdésre nézve: mennyi kell az alsóhoz, hogy annyi legyen mint a' Felső? nem elég a' csupa mennyiséget venni tekintetbe, hanem szükség azoknak ellenkező vagy egyező voltokat is. És így inkább ezt mondhatjuk: Az Algebrai kivonásban az a' kérdés: mi kell az Alsóhoz, hogy az legyen belőle, a' mi a' Felső? Ezt pedig csak úgy találhatjuk meg, ha az alsó Jelét ellenkezőre változtatjuk, 's öszveadást csinálunk; tudván azt, hogy itt az öszveadás is nem csupán öszvesummázás, — sőt, ha ellenkezők az öszveadandó Mennyiségek, akkor éppen külömbség-keresés. — Lássunk külön eseteket:

a. Ha Tettleges nagyobb Mennyiségből kell kivonni Tettleges kissebbet p. o. $\begin{array}{r} +50 \\ +30 \\ \hline \end{array}$: az a' kérdés, mi kell a' $+30$-hoz, hogy az legyen a' mi a' $+50$? Felelet: kell $+20$; melly is úgy jön ki, ha a' $+30$ jelét megváltoztatván, Algebraice a' $+50$hez adom, vagy is belőle kivonom. $\begin{array}{r} +50 \\ \pm 30 \\ \hline +20 \end{array}$

b. Ha Tettleges kissebből kell kivonni Tettleges nagyobbat, p. o. $\begin{array}{r} +30 \\ +50 \\ \hline \end{array}$: az a' kérdés: mi kell a' $+50$hez, hogy $+30$-á legyen? Felelet: kell -20, melly lerontson a' $+50$ből, $+20$at, 's itt marad $+30$. Ez pedig úgy jön ki, ha a' $+50$ jele megváltoztatván, Algebraice, a' $+30$-hoz adatik. $\left.\begin{array}{r} +30 \\ \pm 50 \\ \hline -20 \end{array}\right\} = +30.$

c. Ha Nemlegesből kell kivonni Tettlegest, akár nagyobb légyen a' felső, akár kisebb, p. o. $\begin{array}{r} -30 \\ +50 \\ \hline \end{array}$ vagy $\begin{array}{r} -50 \\ +30 \\ \hline \end{array}$;

az a' kérdés: mi kell a' +50hez, hogy —30-á légyen? Felelet: kell elébb —50, melly a' +50-t lerontsa, azon feljül még —30, és igy öszvesen kell —80. — A' +30-hoz is, hogy —50-é légyen, kell elébb —30, melly a' +30-at lerontsa, azontúl pedig —50, és igy öszvesen —80. Ez pedig úgy jön ki, ha az alsó Jelét megváltoztatván, öszveadást csinálunk. —

$$\begin{array}{r} -30 \\ \pm 50 \\ \hline -80 \end{array} ; \quad \begin{array}{r} -50 \\ \pm 30 \\ \hline -80. \end{array}$$

d. Ha tettlegesből kell kivonni nemleges akár kisebbet, akár nagyobbat, p. o. $\begin{array}{r} +50 \\ -30 \\ \hline \end{array}$; $\begin{array}{r} +30 \\ -50 \\ \hline \end{array}$: az a' kérdés: mi kell a' —30-hoz, hogy +50-é légyen? Felelet: kell elébb +30, melly a' —30-t lerontsa, azontúl még +50, és igy = +80. — Hasonlóúl a' —50-hez, hogy +30 legyen, kell elébb +50, hogy a' —50-t lerontsa, azontúl +30, és igy = +80. Ez pedig úgy jön ki, ha az alsó Jelét megváltoztatván, öszveadást csinálunk.

$$\begin{array}{r} +50 \\ -30 \\ + \\ \hline +80 \end{array} ; \quad \begin{array}{r} +30 \\ -50 \\ + \\ \hline +80. \end{array}$$

§. 9. Hogy az alsó jeleit mért kell megváltoztatni: azt igy is lehet világositani: Ha én 25-ből ki akarok venni $\underline{20-5}$-t, az azt teszi: ki kell venni 20-t, de 5 hiján, és igy csak 15-t. Már ha 20-t vennék ki: akkor többet vettem volna ki 5-el, mint kellene, és igy kevesebb maradna 5-el, mint kellene. Hogy hát annyi maradjon, a' mennyinek kell maradni: azt az 5-t a' maradékhoz még hozzá kell adnom.

$$\begin{array}{r} +25 \\ +20-5 \\ -\quad+ \\ \hline 5+5 \end{array} \;\Bigg|\; = \begin{array}{r} 25 \\ 15 \\ \hline 10 \end{array}$$

több világosító példák adatnak szóval.

3szor. Szorozás.

§. 10. Első eset: Ha Egytagú mennyiséget kell Egytagú mennyiséggel szorozni: ezen szorozásra három tekintetből adatnak szabályok, ugymint:

1. A' Jelekre
2. Az Öszvezőkre
3. A' Betűkre nézve.

1. A Jelek szabálya ez: Az Egyező Jelű szorozók szorozatja lesz Tettleges, — az ellenkező Jelüeké Nemleges (signa eadem dant plus, signa diversa minus) p. o. $+a \times +b = +ab$, és $-a \times -b = +ab$, és $+a \times -b = -ab$, és $-a \times +b = -ab$.

Ugyan is ha az egyik szorozó Tettleges: az azt teszi, hogy a' másik szorozót, úgy a' mint van, vagy is a' maga Jelével annyiszor kell magához adni, a' hány egy van az előbbi szorozóban, p. o. $+3 \times +4$ azt teszi, hogy a' $+4$-t 3szor kell magához adni, a' maga Jelével, 's lesz a' szorozat $= +12$; — igy $+3 \times -4$ azt teszi, hogy a' -4-t 3 szor kell magához adni a' maga Jelével, 's lesz $= -12$.

Ha az egyik Szorozó Nemleges: az azt teszi, hogy a' másik Szorozót magát magához visszafelé kell adni, vagy is magát magából kivenni, vagy is magát magával lerontani annyiszor, a' hány egy van az előbbi szorozóban; vagy keresni kell ollyan számot, melly lerontsa a' másik szorozót annyiszor, a' hány egy van az első Nemleges szorozóban. Már a' Tettlegest lerontja a' Nemleges, 's viszont a' Nemlegest a' Tettleges, p o. $-3 \times +4$ azt teszi, hogy a' $+4$ t magát magával le kell rontani háromszor, vagy keresni kell egy ollyan számot, melly a' $+4$-t magát magával 3szor rontsa le, — ez pedig lesz a' -12. — Hasonlóul: -3×-4 azt teszi, hogy a' -4-t le kell rontani 3szor, azt pedig lerontja 3szor $+12$, p. o. 4 forint adósságot ha háromszor akarok lerontani, arra 12 forint kész pénz kell.

Jegyzék. Igy is lehetne világositani:

1. $+$-t szorozni $+$ al = állítást erősíteni, 's lesz belőle állitás (positivum).

2. $+$-t szorozni $-$ al = állítást czáfolni, 's lesz belőle tagadás (negativum).

3. — -t szorozni + al = tagadást erősíteni 's lesz belőle tagadás (negativum).

4. —t szorozni — al = tagadást czáfolni, 's lesz belőle állítás (positivum).

§. 11. A' mi a' szorozók öszvezőit illeti: azokat egymással szorozni kell: 's a' mi kijön, a' lesz a' szorozat öszvezője. Mert az Algebrai Mennyiségben p. o. 2ab mind a' 2, mind az a mind a' b megannyi külön szorozói azon Mennyiségnek, mellyet a' 2ab tesz. És így ha ezen egész mennyiséggel 2ab akarunk egy másikat, p. o. 3cd szorozni; tehát mindenik alkotó részével, t. i. mind a' 2-vel, mind az a-val, mind a' b-vel, külön külön szorozni kell ama' másik mennyiséget.

§. 12. A' Betükről is az a' szabály: hogy az egyik szorozónak minden Betűivel szorozni kell a' másik szorozót, t. i. Kijelentés által; melly úgy esik meg, ha a' szorozatban mind azon Betüket, mellyek a' két szorozóban vannak, öszveírjuk, p. o. $3ab \times 2cd = 6abcd$.

Ha ugyan azon Betü mind a' 2 szorozóban találtatik: azt is annyiszor kellene leírni a' szorozatban, a' hányszor van mindöszve a' két szorozóban, p. o. $ab \times ac = abac = aabc$. De itt Rangjellel rövidíthetni a' dolgot, t. i. ugyan azon Betüt csak egyszer kell leirni, a' szorozatban, — de a' 2 szorozóban azon Betü Rangjeleit öszve kell szedni, 's ezen summa lesz azon betünek a' szorozatban Rangjele, p. o. $ab \times ac = a^2bc$, igy $a^3c \times a^2bc^2 = a^5bc^3$; mert igy volnának teljesen: $aac \times aabcc = aaaaabccc$.

P é l d á k.

$$3a^2bc^n \times 2a^3cd^{-2} = 6a^5bc^{n+1}d^{-2}$$

$$-5a^3b^{-1}c^n \times 4a^{-4}bc^2 = -20a^{-1}b^0c^{n+2}$$

$$-5a^{n-2}b^xc^{n-3} \times -2a^{n-3}b^{2x}c^{n+3} =$$
$$+10a^{2n-5}b^{3x}c^{2n}$$

$$-8a^{n-x+1}b^rc^{n-e} \times -3a^{x-n}b^{1-r}c^{2e-n} = 24abc^e.$$

§. 13. Másik eset. Ha vagy mind a' két, vagy legalább az egyik szorozó több Tagú Mennyiség, akkor az egyik szorozónak minden Tagját, a' másik szorozónak minden Tagjával külön külön szorozni kell, a' közelebb előadott mód szerínt; — 's a' szorozatban kijött Tagokat, öszvezés által kevesebb Tagokra kell venni ha lehet, ha pedig nem lehet, csak úgy maradnak.

P é l d á k.

$$\begin{array}{l} a + x \\ a - x \\ \hline \left.\begin{array}{l} a^2 + ax \\ \quad - ax - x^2 \end{array}\right\} = a^2 - x^2. \end{array}$$

Más Példa. $$\begin{array}{r} 4a^2 + 4ay^2 + y^4 \\ 2a + y^2 \\ \hline 8a^3 + 8a^2y^2 + 2ay^4 \qquad\qquad \\ 4a^2y^2 + 4ay^4 + y^6 \\ \hline 8a^3 + 12a^2y^2 + 6ay^4 + y^6. \end{array}$$

Más. $$\begin{array}{l} 3a^2b^nc^{4-x} + 5abx^4 - 2a^nd \\ 6ab^{-2} - 7bd^{-1}x \\ \hline 18a^3b^{n-2}c^{4-x} + 30a^2b^{-1}x^4 - 12a^{n+1}b^{-2}d \\ - 21a^2b^{n+1}c^{4-x}d^{-1}x - 35ab^2d^{-1}x^5 + 14a^nbd^0x. \end{array}$$

Más. $$\begin{array}{l} 3a^2b^{-1} - 5a^{-1}b^2c - 4a^nbc^n \\ 5a^{-1}b^2c - 5a^{-1}b^2c. \\ \hline \left.\begin{array}{l} 15abc - 25a^{-2}b^4c^2 - 20a^{n-1}b^3c^{n+1} \\ - 15abc + 25a^{-2}b^4c^2 + 20a^{n-1}b^3c^{n+1} \end{array}\right\} \\ \hline \quad 0 \qquad\quad 0 \qquad\quad 0 \end{array}$$

4szer. O s z t á s.

§. 14. **Első Eset: Ha mind az osztandó, mind az osztó egytagú Mennyiség.** — Itt is 3 tekintetből adatnak szabályok:

a. Jelekre

b. Öszvezőkre

c. Betükre nézve.

1. A' J e l e k r e nézve éppen az a' szabály, a' mi a' szorozásban: t. i. ha az osztandónak és osztónak egyező jelök van: a' hányados lesz T e t t l e g e s; — ha pedig amazoknak különböző jelök van, a' hányados lesz N e m l e g e s (signa eadem dant plus; signa diversa minus) p. o.

$$\frac{+10}{+2} = +5$$

$$\frac{+10}{-2} = -5$$

$$\frac{-10}{+2} = -5$$

$$\frac{-10}{-2} = +5$$

Ugyan is a' közönséges osztásban az a' kérdés: hányszor kell vennni az osztót, hogy annyi legyen mint az osztandó? Az Algebrai osztásban pedig ez is hozzá jön a' kérdéshez: még pedig valljon magát magához adólag kell e venni egynehányszor az osztót, vagy pedig magát lerontólag (positive e vagy negative) hogy az legyen belőle, a' mi az osztandó? Ha erre figyelmezünk, mindjárt általlátjuk, hogy ezen szabály helyes. Mert p. o. $\frac{+10}{+2}$: ez a' kérdés: hányszor, és miképpen kell venni a' $+2$-t hogy $+10$ legyen? Felelet: magát magához adólag 5-ször, és igy a' Hányados, melly épen ezt mutatja, lesz $= +5$. — Igy $\frac{+10}{-2}$: a' Hányados lesz -5, mert a' -2-t magát lerontólag (negative) kell venni 5-ször, hogy $+10$ legyen, (ha öszveadólag vennénk: úgy -10 lenne). — Igy $\frac{-10}{+2}$: a' Hányados lesz $= -5$, mert a' $+2$-t lerontólag kell venni 5-ször, hogy belőle -10 legyen. — Igy $\frac{-10}{-2}$: a' Hányados lesz $= +5$, mert a' -2-t magát magához adólag kell venni 5-ször, hogy belőle -10 legyen.

§. 15. A' mi az öszvezőket illeti: az osztandó öszvezőjét el kell osztani az osztójéval; 's ha kereken el lehet, a' mi kijön, a' lesz a' Hányados öszvezője; ha pedig kereken nem lehet: ki kell jelenteni, p. o. $8:2 = 4$; $5:2 = \frac{5}{2}$.

§. 16. A' mi a' Betüket illeti, azokra nézve ezeket jegyezzük meg:

1. A' Szorozásban két Szorozóból úgy csináltunk Szorozatot, hogy a' Szorozóban lévő minden betüket öszveszedtük. Itt az osztásban, ki lévén adva a' Szorozat, és az egyik Szorozó, úgy találjuk meg a' másik Szorozót, ha a' kiadott Szorozónak minden betüit kihagyjuk a' Szorozatból; — és a' mi ott marad, bizonyosan a' lesz a' másik Szorozó, vagy is a' Hányados. És igy a' melly betü meg van az osztandóban, de nincs az osztóban: az látni való hogy a' másik Szorozóhoz, t. i. a' Hányadoshoz tartozik, p. o.

$$\frac{ab}{a} = b; \quad \frac{abcd}{ac} = bd.$$

2. És igy ha ugyan azon Betű megvan mind az osztandóban, mind az osztóban: a' hányszor meg van az osztóban, annyiszor hagyjuk ki az osztandóból, p. o. $\frac{aab}{a}$ lesz a' Hányados $\frac{ab}{}$; igy $\frac{aaabb}{aab}$ lesz a' Hányados $= ab$. Vagy mivel a' betük többszöri leirása helyett Rengjelekkel élünk: tehát az osztóbeli betünek Rangjelét az osztandóbeli ugyan azon betünek Rangjeléből ki kell venni, 's a' maradék lesz a' Hányadosban azon betünek Rangjele, p. o.

$$\frac{a^5 b^3}{a^2 b} = a^3 b^2$$

3. Ha pedig az osztóban van ollyan betü, melly az osztandóban nincs: ezt a' Hányadosban is osztó gyanánt alá kell írni: p. o. $\frac{4 a^2 b}{3abc} = \frac{4a}{3c}$; — igy $\frac{3ab}{2ac} = \frac{3b}{2c}$. Mert ha a' kiadott Szorozónak, másik Szorozó társát, vagy is Hányadost másként nem találhatok: találok úgy, ha a' Szorozatot a' kiadott Szorozóval elosztom, legalább kijelentve, — és igy Szorozat $= 3ab$, Szorozó $= 2c$, másik Szorozó $\frac{3ab}{2c}$, és ha ezt a' $\frac{2c}{}$ vel szorozzuk: kiadja a' $3ab$-t, $2c \times \frac{3ab}{2c} = \frac{6abc}{2c} = 3ab.$

Példák: $\dfrac{7a^3b^3c}{-2a^2b^3} = -\dfrac{7ac}{2}$

Más. $\dfrac{10a^3b^{n-1}d^3}{5a^nb^{n-1}c^3} = \dfrac{2a^{3-n}d^3}{c^3}$

Más. $\dfrac{6a^2b^{n-2}c^{-2}}{a^{-2}b^{2-n}c^{-1}} = 6a^4b^{2n-4}c^{-1}$

§. 17. Másik eset: Ha mind az osztó mind az osztandó, vagy legalább az osztandó több Tagú Mennyiség: akkor az osztás igy megy véghez:

1. Ugy kell leirni bezáró lineák közzé az osztandó tagjait sorba, hogy a' melly betü legtöbbször előfordúl, annak rangjelei fogydogálva következzenek: $9a^4 - 2a^3c + 2a^2b + 5ac$.

2. Az osztó első Tagjával el kell osztani az osztandó első Tagját; — a' Hányadost oldalról irván, azzal szorozni kell az osztónak minden Tagjait, 's az itt származó szorozatot ki kell venni az osztandó egyfajta Tagjaiból. Ha maradék nincs: kész az osztás, p. o.

$$\begin{array}{l|l|l} a+a & ab + ab & b \\ & \pm ab \pm ab & \\ \hline & 0 \quad 0 & \end{array}$$

Ha pedig még maradtak osztandó Tagok: ismételni kell az előbbi munkát, 's a' t. mig utóljára vagy semmi se, vagy valami ollyan marad, a' mit már osztani nem lehet; vagy ha el lehetne is osztani, de a' hányadosnak az osztó minden tagjaival lejendő szorozatját belőle kivonni nem lehetne.

P é l d á k:

$$\begin{array}{l|l|l} \text{Osztó:} & \text{Osztandó:} & \text{Hányados:} \\ 2a-b & 8a^3 + 2a^2b - ab^2 - b^3 & 4a^2 + 3ab + b^2 \\ & \pm 8a^3 \mp 4a^2b & \\ \hline & 0 \quad + 6a^2b - ab^2 - b^3 & \\ & \quad \pm 6a^2b \mp 3ab^2 & \\ \hline & \quad 0 \quad + 2ab^2 - b^3 & \\ & \quad\quad \pm 2ab^2 \mp b^3 & \\ \hline & \quad\quad 0 \quad 0 & \end{array}$$

Más.

Osztó	Osztandó.
$3a - 2x + b^{-2}y$	$6a^{n+1}x - 4a^{n-1}x^2 + 2a^{n-1}b^{-2}xy$
	$-6a^{n+1}x \mp 4a^{n-1}x^2 \pm 2a^{n-1}b^{-2}xy$
	$0 \quad 0 \quad 0$
	$-9a^2y^{-2} + 6xy^{-2} - 3b^{-2}y^{-1}$
	$\mp 9a^2y^{-2} \pm 6xy^{-2} \mp 3b^{-2}y^{-1}$
	$0 \quad 0 \quad 0$
	$+6a^2b^3 - 4b^3x + 2by - 6a^3b$
	$\pm 6a^2b^3 \mp 4b^3x \pm 2by$
	$0 \quad 0 \quad 0$

Hányados

$2a^{n-1}x - 3y^{-2} + 2b^3$ ehez még járul a' fennmaradt osztatlan $\dfrac{-6a^3b}{3a^2 - 2x + b^{-2}y}$.

HARMADIK SZAKASZ.

Részletek Tudománya (Doctrina Fractionum).

§. 1. Ha valamelly Egészet egynehány egyenlő részekre felosztunk, vagy felosztatni gondolunk; és ezen részek közzül egyet, vagy egynehányat veszünk: ezen vett részeket együtt nevezzük Részlet-nek (Fractio, Numerus Fractus), p. o. ha forintot elosztok 20 részre, vagy garasra: egy, két, három 's a' t. garas, a' forinthoz képpest lesz Részlet. — Igy ha egy 100 forintból álló csomó pénzt felosztok 20 részre, abból egy egy részre esik 5 forint, és igy, ez, vagy ez egynehányszor véve, 20-on alól, az egész csomóhoz képpest Részlet. — Akármelly mennyiség tehát külömböző tekintetben lehet Egész is Részlet is, p. o. egy forint a' garasokhoz képpest Egész, de 10 forinthoz képpest Részlet; — egy garas a' krajczárokhoz képpest Egész; de a' forinthoz képpest Részlet.

§. 2. A' Részletet két Taggal lehet kifejezni, — mellyek közzül az egyik azt jelenti: hány részre van elosztva az Egész? és igy — millyen nagyságúak, vagy éppen mik a' Részek? Ezt a' tagot hivják Nevezőnek vagy Osztónak (Denominator). — A' másik tag pedig azt mutatja; hány illyen részt kell venni, a' millyenre most az Egész fel van osztva? Ezt a' tagot hivják számlálónak (Numerator). — Egy lineát huzván, annak felibe a' Számlálót, alá a' Nevezőt szokták irni, p. o. $\frac{2}{20}$ forint, itt a' 20 Nevező azt jelenti, hogy a' forint el van osztva 20 részre, vagy is garasokra; — a' 2 Számláló pedig azt, hogy — két garast kell venni; 's igy mondjuk ki; két huszadrész (duae vigesimae).

§. 3. A' Részletet kifejező két mennyiséget még másképpen is lehet egymáshoz képpest tekinteni; ugy t. i hogy a' felsőt — vagy Számlálót nézzük osztandónak, — az alsót pedig Osztónak, hányados lessz a' Részletértéke, p. o. $\frac{2}{20}$ forint ezt teszi: 2 forintnak huszad részre, — vagy két forintot = 40 garast husz felé osztván, abból kell venni egy részt, melly lessz = két garas, — igy $\frac{6}{20}$ = hat forintnak huszad része = hat garas. Innen látni való, hogy a' Részlet nem egyéb, mint osztás; és a' mi az osztásról igaz: igaz az a' Részletekről is. —

§. 4. Valóságos Részletnek (Fractio genuina) neveztetik az, mellyben a' Számláló kisebb a' Nevezőnél, p. o. $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{7}$'s a' t., mert az illyen jelent kevesebbet egy egésznél. — A' mellynek pedig Számlálója vagy éppen annyi, vagy még több mint a' Nevezője, az neveztetik Lárvás Részletnek (Fractio spuria vel impropria), mert abban Egész is lappang. Nevezetesen ha éppen egyenlő a' Számláló a' Nevezővel: akkor a' Részlet értéke = egy egész, p. ok. $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{20}{20}$ = 1, mert a' hány részre el van osztva az Egész, éppen annyit kell venni; — vagy az osztót az osztandóban éppen egyszer találjuk meg: $\frac{3}{3}$ = 1. — Ha pedig a' Számláló két annyi mint a' Nevező; vagy más szókkal ha az osztandó két annyi mint az osztó: akkor a' Részlet értéke két egész; — ha három annyi: akkor három egész; egy szóval a' hányszorta több a' Számláló a' Nevezőnél: annyi egész van benne; a' mit megtudunk úgy, ha a' Nevezővel a' Számlálót elosztjuk, p. o. $\frac{10}{2}$ = 5 egész, $\frac{20}{5}$ = 4 egész. Az illyen osztásban vagy kereken egész jön ki, vagy mellette Részlet is, p. o. $\frac{25}{5} = 5$, $\frac{27}{5} = 5 + \frac{2}{5}$.

Következet. Akármelly Egészet kifejezhetni Lárvás Részlettel, felvévén Nevezőül — vagy Számlálóúl akármelly számot, — csak arra vigyázzunk, hogy a' Számláló a' Nevezőnél annyiszorta legyen nagyobb, a' hány egyet akar jelenteni a' Lárvás Részlet, p. o. 5 $= \frac{20}{4} = \frac{25}{5} = \frac{30}{6} = \frac{35}{7} = \frac{40}{8}$'s a' t. 6 $= \frac{24}{4} = \frac{60}{10}$'s a' t.

§. 5. A' Valóságos Részletben a' hányad része a' Számláló a' Nevezőnek, vagy a' hányszorta kisebb a' Számláló a' Nevezőnél: annyid része a' Részlet értéke a' maga Egészének, p. o. $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{10}{20}$, $\frac{100}{200}$, $\frac{50}{100}$ mindeniknek értéke = fél, mert a' Részek summájának felét vesszük, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{10}{30}$, $\frac{20}{60}$, $\frac{5}{15}$ = egy harmad rész.

Következet. 1. A' Részlet értéke tehát függ a' Számlálónak a' Nevezőhöz való szerétől.

2. Több Részletek közzül mellyiknek légyen kisebb vagy nagyobb értéke, általláthatni, ha mindenikben megvizsgáljuk a' Számlálónak a' Nevezőhöz való arányát p. o.

$$\frac{2}{6} = \frac{3}{9},\ \text{de}\ \frac{2}{6} > \frac{5}{20},\ \frac{2}{6} < \frac{6}{15}. \text{—}$$

3. Az ollyan Részleteknek, mellyekben a' Számlálók a' magok Nevezőikhez egyenlő szerben vannak, — értékök is egyenlő, p. o. $\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{6}{12}$, mert a' Számláló mindenikben fele a' Nevezőnek.

4. Akármelly részlet helyett lehet más, de egyenlő értékű Részletet csinálni; csak arra kell vigyázni, hogy a' minő szerben van a' kiadott Részlet számlálója a' maga Nevezőjéhez, — vagy Nevezője Számlálójához: ollyan szerben legyen a' most formálandó Részletben is, péld. ok. $\frac{2}{6}$ helyett lessz $= \frac{3}{9} = \frac{4}{12}$. Ha pedig kiadnák a' formálandó Részletnek Nevezőjét: keresni kell hozzá Számlálót, melly ő hozzá ugy legyen, mint van a' kiadott Részlet Számlálója a' maga Nevezőjéhez, p. o. $\frac{2}{6}$ helyett kell csinálni ollyan Részletet, mellynek Nevezője legyen = 24; ennek Számlálója lessz = 8, mert valamint 2 a' 6-nál, ugy 8 a' 24-nél háromszorta kisebb. — Vagy ha kiadnák a' formálandó Részletnek számlálóját: keresni kell hozzá Nevezőt, mellyhez ő éppen ugy legyen, mint a' kiadott Részlet Számlálója a' maga Nevezőjéhez p. o. $\frac{2}{6}$ helyett kell csinálni ollyan Részletet, mellynek számlálója legyen = 6, — itt a' Nevezőnek háromszorta kell nagyobbnak lenni, is igy lesz = 18; lesz hát $\frac{2}{6} = \frac{6}{18}$. —

Ha akár a' keresett Nevezőt, akár a' keresett Számlálót egyszerre ki nem találhatnánk: arany regulán kell keresni, p. o. $\frac{9}{18}$ helyett kell csinálni 60 Nevezőjü Részletet; keresek annak számlálóját igy:

$$\underbrace{18 : 9 = 60}_{18 \mid 540 \mid 30} : x = \tfrac{30}{60},$$

vagy $\frac{9}{18}$ helyt 7 Számlálóajut igy:

$$9 : \underbrace{18 = 7}_{9 \mid 126 \mid 14.} : x = \tfrac{7}{14},$$

Jegyzék. Midőn valamelly Részlet ollyan Nevezőjü, vagy is annyi felé osztja az Egészet, a' hányfelé azt rendesen nem szokák osztani: az illyen Részlet helyett az előadott módon kell csinálni ollyan Nevezőjűt, mellyre azon egészet szokták osztani, p. o. $\frac{3}{7}$ forint; — mivel a' forintot 7 felé osztani nem szokás — de szokás 60 felé: csinálok 60 Nevezőjü Részletet igy:

$$7 : 3 = 60 : x = \tfrac{25}{60} + \tfrac{5}{7}$$
$$7 \mid 180 \mid 25.$$

§. 6. Az ollyan Részletek, mellyeknek Nevezőjök lehet akármelly szám, neveztetnek Közönséges Részleteknek (Fractiones vulgares) p. o. $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{10}{25}$'s a' t. Az ollyanok pedig, mellyeknek Nevezőjök nem lehet egyéb mint 10, 100, 1000 's a' t. egy szóval az 1, egynehány Helytartókkal, neveztetnek Tizedes Részleteknek (Fractiones Decimales). Lássunk elébb a' Közönségesekről, — azután a' Tizedesekről.

1ször A' Közönseges Részletekről.

§. 7. A' Feljebiekből folynak e' következő igazságok:

1. Ha nem változván a' Nevező a' Számlálót neveljük: nevekedik a' Részlet értéke; mert ugyan ollyan részekből többet veszünk, p. o. $\frac{2}{12} < \frac{3}{12} < \frac{5}{12} < \frac{7}{12}$. És viszont ha kevesitjük a' Számlálót: kevesedik a' Részlet értéke is, mert ugyan ollyan részekből kevesebbet veszünk, p. o. $\frac{8}{12} > \frac{5}{12}$.

2. Ha nem változván a' Számláló a' Nevezőt szaporitjuk: kevesedik a' Részlet értéke; mert a' Nevezőt nevelni annyit tesz, mint az egészet több részre osztani; — ha több részre oszlik, tehát egy egy rész kisebb lesz; — már ha

ezen kisebb részekből csak annyit veszek, mint elébb a' nagyobbakból vettem: természetesen kevesebbet veszek mint elébb, p. o. $\frac{2}{4} > \frac{2}{8} > \frac{2}{16} > \frac{2}{17}$. És viszont ha a' Nevezőt kevesitjük: a' Részlet értéke nevekedik, mert most a' részek nagyobbakká lettek, p. o. $\frac{2}{16} < \frac{2}{8} < \frac{2}{4} < \frac{2}{2}$.

3. Ha mind a' Számlálót mind a' Nevezőt ugyan annyiszorta szaporitjuk, az az ugyan azon számmal szorozzuk: a' Részlet értéke nem változik. Mert nevekedvén a' Számláló: nevekedett a' Részlet értéke; de nevekedvén a' Nevező, kevesedett a' Részlet értéke: már ha a' mennyit nevekedett, ugyan annyit kevesedett: tehát nem változott, p. o.

$$\frac{2}{3}, \times 3 = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}, \frac{2}{4} \times 3 = \frac{6}{12} \times 4 = \frac{24}{48}.$$

4. Hasonlóul ha mind a' Számlálót, mind a' Nevezőt ugyan annyiszorta kevesitjük, az az ugyan azon számmal elosztjuk: a' Részlet értéke nem változik. Mert kisebbedvén a' számláló kevesedett a' Részlet értéke; de kisebbedvén a' Nevező nevekedett a' Részlet értéke: már ha a' mennyit kevesedett, ugyan annyit nevekedett, tehát nem változott p. o.

$$\frac{20}{60} : 5 = \frac{4}{12} = \frac{20}{60}; \frac{8}{16} : 2 = \frac{4}{8} : 4 = \frac{1}{2}.$$

§. 8. Ezekből ismét folynak e' következő igazságok:

1. Ha valamelly Részletnek értékét két annyivá, három annyivá, 's a' t. egy szóval valahányszorta nagyobbá akarom tenni: kétféleképpen tehetem, t. i. vagy úgy, hogy a' Számlálóját szorozom, — vagy úgy hogy a' Nevezőjét elosztom annyival, a' hányszorta nagyobbá akarom tenni az értékét, p. o. $\frac{10}{25}$ ötszörte nagyobb lessz, vagy igy:

$$\frac{10 \times 5}{25} = \frac{50}{25}, \text{ vagy igy } \frac{10}{25 : 5}, = \frac{10}{5},$$

látni való, hogy $\frac{50}{25} = \frac{10}{5} = 2$.

2. Ha valamelly Részlet értékét valahányszorta kisebbé akarom tenni: ezt is kétképpen tehetem, t. i. vagy ugy, hogy a' Számlálóját elosztom; vagy ugy, hogy a' Nevezőjét szorozom annyival, a' hányszorta kisebbé akarom tenni az értékét, p. o. $\frac{10}{25}$ ötszörte kisebbé lessz, vagy igy:

$$\frac{10 : 5}{25} = \frac{2}{25}, \text{ vagy igy } \frac{10}{25 \times 5} = \frac{10}{125},$$

mert $\frac{2}{25} = \frac{10}{125}$, 's gyakran a' Számlálót nem lehet kereken elosztani; de a' Nevezőt mindég lehet szorozni, p. o. $\frac{5}{7} : 3 = \frac{5}{21}$, $\frac{2}{7} : 5 = \frac{2}{35}$, $\frac{3}{4} : 3 = \frac{1}{4} = \frac{3}{12}$.

3. Valamelly nagy számokkal kifejezett Részletet gyakran kifejezhetünk kisebb számokkal (kisebb Tagokra vonhatjuk, reductio ad minores terminos) a' nélkül, hogy értéke változnék, — ha annak mind számlálóját, mind nevezőjét ugyan azon számmal kereken eloszthatjuk,

p. o. $\frac{50}{100} : 2 = \frac{25}{50} : 5 = \frac{5}{10}$, $\frac{5}{10} : 5 = \frac{1}{2}$ igy

$$\frac{30a^{-n+3}b}{60a^{-n}c^2} : 30a^{-n} = \frac{a^3b}{2c^2}, \text{ — igy}$$

$\frac{48a^{-n}c^2}{60a^{-n}c^2} : 12a^{-n}c^2 = \frac{4}{5}$. De az a' kérdés: hogy találjunk a' Számlálónak és Nevezőnek Közös mérőjét; még pedig Legnagyobb Közös mérőjét, mellyel azt a' lehető legkisebb Tagokra vonhassuk?

§. 9. Két mennyiségnek Közös mérőjét, az az ollyan mennyiséget, melly mind a' kettőt kereken eloszsza, néha egy tekintetre is találhatunk, p. o.

1. A' Betűs mennyiségekben a' melly betük mind a' kettőben megvagynak, azok közös mérők, p. o. $\frac{abq}{axq}$ közös mérő aq, ezzel elosztva lesz belőlök $= \frac{b}{x} = \frac{abq}{axq}$.

2. A' számjegyes mennyiségekben két ollyan mennyiségnek, melly mind kettő páros számon végződik, közös mérőjök $\frac{2}{-}$, p. o. $\frac{24}{96} : 2 = \frac{12}{48}$ $\frac{12}{48} : 2 = \frac{6}{24} : 2 = \frac{3}{12}$.

3. Ha mind a' kettő egy vagy több zeruson végződik: Közös mérő lesz: 10, 100, 1000, 's a' t.

4. Ha mind a' kettő 5-ön, — vagy az egyik 5-ön a' másik zeruson végződik: közös mérő lesz = 5 p. o., $\frac{35}{75} : 5 = \frac{7}{15}$; — $\frac{35}{70} : 5 = \frac{7}{14}$.

5. Ha mind kettőnek számjegyei summáját el lehet osztani 9-el, akkor magokat is el lehet, p. o.

$$9 \left| \frac{3465}{58752} \right| = \frac{385}{6528}$$

6. Ha mind a' számláló, mind a' nevező számjegyeinek summája külön külön vagy 3, vagy 6, 9, 12, 15, 18, 21, 'sa't.

egy szóval a' 3nak szorozatja: akkor azoknak közös mérőjök 3, p. o. $\frac{582}{678}$, 5 + 8 + 2 = 15 és 6 + 7 + 8 = 21, tehát közös mérője 3 's igy $\frac{582}{678}$: 3 = $\frac{194}{226}$

7. Ha a' két utolsó jegyet eloszthatni 4-el: ugy mind el lehet; — ha a' 3 utolsó jegyet eloszthatni 8-al: ugy mind el lehet — (mert 100-at 4-el, és 1000-t 8-al eloszthatni).

§. 10. Legnagyobb közös mérőt (communis maxima mensurát) igy kell keresni: A' nagyobbik számot el kell osztani a' kissebbikkel; ha maradék van, azzal el kell osztani az előbbi osztót; — ha ismét maradék van, azzal ismét az előbbi osztót kell elosztani, — 's igy cselekedni mind addig, mig utoljára maradék nélkül oszt valamellyik, 's ez lesz a' legnagyobb közös mérő. — Ha pedig utoljára a' maradék = 1 lenne: ekkor azon számoknak nincs egyéb közös mérőjők egynél, — és igy azokat kisebb tagokra nem lehet vonni, p. o. $\frac{723}{816}$ kell keresni legnagyobb közös mérőjét:

Osztó.	Osztandó.	Maradék.
723	816	93
93	723	72
72	93	21
21	72	9
9	21	3
3	9	0

Legnagyobb közös mérő = 3 és igy $\frac{723}{816}$: 3 = $\frac{241}{272}$.
Mert 3 al eloszthatni 9-t; úgy de ha 9-t el lehet, úgy 21-t is el lehet; mert a' 9 elosztja a' 21-t, úgy hogy 3 a' maradék; — a' 3 pedig a' 3-t is elosztja. Továbbá ha 21-t el lehet: úgy 72-t is el lehet, mert 21 elosztja a' 72-t; ugy hogy maradék = 9, — a' 3 pedig a' 9-t is elosztja. — Ha 72-t el lehet, ugy 93-t is el lehet, mert 72 elosztja a' 93-t, úgy hogy maradék lessz = 21 ugy de a' 3 a' 21-t is elosztja. — Ha 93-t el lehet: ugy 723-t is el lehet: — mert a' 93 elosztja a' 723-t, ugy hogy maradék lesz = 72, már pedig a' 3 a' 72-t is elosztja. — Ha 723-t el lehet: ugy a' 816-t is el lehet, mert 723 elosztja a' 816-t, ugy hogy maradék = 93; már pedig a' 3 a 93-t is elosztja. Látni való hát, hogy a' 3 mind a' 923-t, mind a' 816-t elosztja maradék nélkűl. E. K. M.

§. 11. A' melly részleteknek ugyan azon Nevezőjök van: neveztetnek Egyfajtáknak (Fractiones Homogeneae) mert az Egésznek ugyan azon részeit, és igy egyfajta dolgokat jelentenek, p. o. $\frac{5}{60}$, $\frac{15}{60}$, $\frac{22}{60}$ forint, mindenik krajczárt jelent. — A' mellyeknek pedig Nevezőjök kölömböző: neveztetnek Különfajtáknak (Fractiones Heterogeneae) mert különfajta dolgokat jelentenek, p. o. $\frac{22}{60}$, $\frac{10}{30}$, $\frac{5}{15}$ forint, az első 1 krajczárokat, a' 2dik két krajczárokat, a' 3ik 4 krajczárokat jelent egy egy részre.

A' különfajtákat lehet egyfajtákká tenni igy: mindenik Részletnek mind Számlálóját, mind Nevezőjét szorozni kell a' többieknek Nevezőikkel; igy osztán mindenik Részletnek ugyan azon nevezője lessz; azomban az értékök sem változott; mert mind a' Számláló. mind a' Nevező ugyan annyiszorta van nevelve, p. o. $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{8}{9}$ = $\frac{90}{135}$, $\frac{81}{135}$, $\frac{120}{135}$, —

$$\frac{ab}{c},\ \frac{2a}{3e},\ \frac{4b}{2d} = \frac{6abde}{6cde},\ \frac{4acd}{6cde},\ \frac{12bce}{6cde}.$$

§. 12. Elegyes Részletnek (Fractio mixta) neveztetik az, a' melly mellett Egész szám is van. Az illyen Egészet Részletté lehet változtatni vagy ugy: ha alá Nevező gyanánt egyet irunk, p. o. $5 + \frac{2}{3} = \frac{5}{1} + \frac{2}{3}$; — vagy pedig hogy a' nevezője éppen az legyen, a' mi a' mellette lévő Részletté, a' midőn a' Számlálónak annyiszorta kell nagyobbnak lenni a' Nevezőnél, a' hány egy van az egészben, — és igy az egészet szorozni kell a' Részlet Nevezőjével, 's ezen szorozat lesz a' számláló, p. o. $5 + \frac{2}{3} = \frac{15}{3} + \frac{2}{3}$; vagy öszvevéve $= \frac{17}{3}$. —

A' Közönséges Részletek Algorithmusai.

1ször Öszvezés.

§. 13. Különfajta Részleteket öszveadni nem lehet, valamint semmi különfajta dolgokat. — Tehát ha különfajták a' Részletek: egyfajtákká kell tenni; — akkor a' Számlálóikat öszveadni, 's a' közös Nevezőt a' summának alá írni, p. o. $\frac{3}{4} + \frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{45}{60} + \frac{40}{60} + \frac{48}{60} = \frac{137}{60}$, melly Lárvás Részletből valóságost csinálunk elosztván a' Számlálót a' Nevezővel

$$60 \mid 137 \mid = 2 + \frac{17}{60}$$

Ha az öszveadandók közt egészek is vannak; azokat külön, és a' Részleteket is külön kell öszveadni; — vagy ha tetszik, változtassuk azokat is Részletekké, a' feljebb előadott módon, p. o. $2 + \frac{3}{4} + 5 + \frac{2}{5} = 7 + \frac{15}{20} + \frac{8}{20} = 7 + \frac{23}{20} = 8 + \frac{3}{20}$ vagy $7 + \frac{23}{20} = \frac{140}{20} + \frac{23}{20} = \frac{163}{20} = 8 + \frac{3}{20}$.

2szor Kivonás.

§. 14. Csak Egyfajta Részletek körűl történhetik Kivonás is, és csak a' számlálót kell a' számlálóból kivenni, 's a' maradéknak a' közös nevezőt alá írni, p. o. $\frac{6}{60} - \frac{4}{60} = \frac{2}{60}$ forint; mert ez azt teszi 6 kr. — 4 kr. = 2 kr. A' Különfajtákat tehát előbb egyfajtákká kell tenni. — Ha Egészek is vannak: vagy külön azokat egymásból ki kell venni; vagy pedig azokat is Részletté változtatni, 's a' magok Részletökhöz adni, p. o. $5 + \frac{4}{5} - 4 + \frac{3}{5} = 1 + \frac{1}{5}$ vagy $\frac{29}{5} - \frac{23}{5} = \frac{6}{5}$ így $6 + \frac{2}{3} - 5 + \frac{3}{4} = \frac{20}{3} - \frac{23}{4} = \frac{80}{12} - \frac{69}{12} = \frac{11}{12}$. — Ha illyenkor a' kivonandó Részlet nagyobb, mint a' mellyből ki kellene vonni: tehát vagy az Egészet egészen Részletté teszem; vagy egyet belőle elvévén, csak azt teszem Részletté, p. o. $6 + \frac{3}{6} - 5 + \frac{5}{6} = 5 + \frac{9}{6} - 5 + \frac{5}{6} = \frac{4}{6}$ vagy $\frac{39}{6} - \frac{35}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. — Ha Betüs Részletet kell Betüsből kivenni: vigyázni kell a' Jelek azon törvényére, melly az egészek körül adatott, p. o.

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{+ad}{bd} \\[3em] \dfrac{-bc}{+bd} \end{array}\right\} = \frac{ad + bc}{bd}$$

3szor Szorozás.

§. 15. Valamelly mennyiséget egész számmal szorozni annyit tesz, mint azt annyiszorta tenni nagyobbá, a' hány egy van a' szorozóban; de Részlettel szorozni annyit tesz, mint azon mennyiséget egyszer sem venni, hanem csak annak valamelly részét. És igy midőn Részlettel szorozunk, akkor valósággal kevesitünk, p. o. $25 \times 5 = 125$ de; $25 \times \frac{1}{5} =$ 25-nek ötöd része $= \frac{25}{5} = 5$.

§. 16. A' Részletek szorozásában ezen esetek jöhetnek elő:

1. Ha Részletet kell szorozni Egésszel: akkor annak értékét annyiszorta kell nagyobbá tenni, a' hány egy van a' szorozóban. Ezt pedig kétképpen tehetem, t. i. vagy a' Számlálóját szorozom, — vagy a' Nevezőjét elosztom a' kiadott Egésszel, p. o. $\frac{2}{8} \times 4 = \frac{8}{8}$ vagy $= \frac{2}{2}$.

2. Ha Egészet kell szorozni Részlettel: akkor azon Egészet egyszer se veszem egészen, hanem csak annyid részét, a' mennyit a' Részlet mutat, p. o. $3 \times \frac{2}{4}$ a' 3-nak 4ed részét kell venni kétszer $= \frac{3}{4} \times 2 = \frac{6}{4} = 1 + \frac{2}{4}$ — így $3 \times \frac{2}{6} = \frac{6}{6} = 1$, vagy $3 \times \frac{2}{6} = \frac{2}{2} = 1$. És így itt is az Egésszel vagy szorozni kell a' Részletnek Számlálóját, — vagy elosztani Nevezőjét. —

3. Ha Részletet kell szorozni Részlettel: ekkor is kevesebb értékű lesz a' szorozat, mint az a' mit szoroztunk, mert ezt egyszer sem vettük, hanem csak valamelly részét, p. o. $\frac{2}{3} \times \frac{3}{5}$ azt teszi, hogy $\frac{2}{3}$nak ötöd részét kell venni háromszor. Ötöd részét ugy veszem, ha Nevezőjét 5-el szorozom, 's lesz $= \frac{2}{15}$; ezt háromszor ugy veszem, ha Számlálóját 3-mal szorozom 's lessz $= \frac{6}{15}$. És így a' két szorozó Részletnek Számlálóit egymással, 's Nevezőit egymással szorozni kell, p. o.

$$\frac{3}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{12}{35},\quad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

§: 17. Következetek:

1. Ha az egyik szorozó Egész szám: lehet Részletté változtatni egyet alá irván; 's akkor a' Számlálót Számlálóval, Nevezőt Nevezővel szorozni kell, p. o.

$$3 \times \frac{2}{3} = \frac{3}{1} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

2. Az elegyes számok előbb Lárvás Részletekké változtatódván a' rendes módon szoroztassanak, p. o.

$$2 + \frac{2}{3} \times 3 + \frac{3}{4} = \frac{8}{3} \times \frac{15}{4} = \frac{120}{12} = 10$$

3. Ha több Részleteket kell egymással szorozni: mindnyájoknak Számlálóji egymással, és Nevezői egymással szoroztassanak, p. o. $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}$.

4. A' betűs mennyiségek Jeleire nézve a' feljebb adott szabályt kell megtartani, p. o.

$$+\frac{a}{b} \times -\frac{c}{d} = -\frac{ac}{bd},$$

4szer Osztás.

§. 18. Láttuk feljebb, hogy minél nagyobb az osztó; annál kisebb a' Hányados; és minél kisebb az osztó, annál nagyobb a' Hányados, p. o. 20 : 10 = 2, 20 : 5 = 4. Ha az osztó = 1 : akkor a' Hányados éppen annyi mint az osztandó, p. o. 20 : 1 = 20. Ha az osztó egynél több: úgy a' Hányados az osztandónál kevesebb; de ha az osztó kevesebb egynél, az az Részlet: ugy a' Hányados az osztandónál nagyobb, p. o. 10 : $\frac{1}{2}$ = 20, mert $\frac{1}{2}$-t tizben 20szor találok meg. —

Valahányszor tehát valóságos Részlettel osztunk, akár Egész számot, akár Részletet: a' Hányados mindég nagyobb lesz mint az Osztandó.

§. 19. Az osztásban ezen esetek jöhetnek elő:

1. Ha Részletet kell osztani Egésszel: vagy a' a' Számlálóját kell elosztani, ha kereken el lehet; — vagy a' Nevezőjét kell szorozni az egésszel, p. o. $\frac{10}{12} : 5 = \frac{2}{12} = \frac{10}{60}$ (lásd az okát feljebb §. 8 Nro. 2)

2. Ha Egésszet kell osztani Részlettel: változtatni kell az Egészet Részletté, — akár egyfajtává az osztóval, akár különfajtává; — 's úgy kell vele bánni, mint a' Részletekkel; nevezetesen:

3. Mikor Részletet kell Részlettel osztani: itt ezen esetek jöhetnek elő:

a. Ha az Osztandó számlálójában az Osztó számlálóját, és az Osztandó Nevezőjében az Osztó Nevezőjét kereken meg lehet talá!ni: tehát osszuk el a' Számlálót Számlálóval, Nevezőt Nevezővel, p. o. $\frac{4}{16} : \frac{2}{4} = \frac{2}{4}$ igy $\frac{3}{25} : \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$; mert az a' kérdés, hányszor van meg az Osztó az Osztandóban, — és igy hányszor van meg ennek Számlálója, amannak Számlálójaban, 's ennek Nevezője amannak Nevezőjében?

b. Ha egyfajták a' Részletek: akkor csak az osztandó Számlálóját kell elosztani az Osztó Számlálójával; mert ha a' Nevezőket elosztanánk, ott a' Hányados lenne = 1, az pedig nem oszt, és igy a' Nevezőben elmaradhat, p. o. $\frac{8}{50} : \frac{2}{50} = \frac{4}{1} = 4$. És ha a' Számlálót a' Számlálóval kereken nem lehet elosztani: elosztjuk kijelentve, p. o. $\frac{5}{60} : \frac{8}{60} = \frac{5}{8}$ igy $\frac{5}{60} : \frac{8}{60} = \frac{5}{8}$.

c. Ha a' Részletek különfajták: változtatni kell őket egyfajtákká; és akkor az Osztandó Számlálóját az Osztó Számlálójával elosztani, p. o. $\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{8}{12} : \frac{9}{12} = \frac{8}{9}$, vagy mivel itt a' közös Nevezőkkel semmi bajunk sincs: tehát munka-rövidítés kedvéért csak a' Számlálókat csináljuk ki, ugy hogy az Osztandó Számlálóját szorozzuk az Osztó Nevezőjével, — az Osztó számlálóját pedig az Osztandó Nevezőjével, p. o. $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{8}{9}$. — Vagy hogy keresztbe ne kelljen szorozni: tehát az Osztó Számlálóját a' Nevezőjével cseréljük fel, 's ekkor a' Számlálót Számlálóval, Nevezőt Nevezővel szorozzunk, 's a' kijött Szorozat lessz a' Hányados. 'S ez a' Részletek osztásának közönséges törvénye, p. o. $\frac{2}{3} : \frac{3}{4}$ lesz $= \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{8}{9}$.

§. 20. Következetek:

1. Akármelly esetben alkalmaztatható szabály ez: az Osztónak Számlálóját Nevezőjével cseréld fel; 's ekkor csak szorozást csinálj. p. o. $\frac{2}{3} : 4 = \frac{2}{3} : \frac{4}{1} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ igy $4 : \frac{2}{3} = \frac{4}{1} : \frac{2}{3} = \frac{4}{1} \times \frac{3}{2} = \frac{12}{2} = 6$.

2. Ha elegyes mennyiségeket kell osztani: az Egészek előbb változtassanak Részletekké, p. o. $5 + \frac{2}{3} : 3 + \frac{2}{5} = \frac{17}{3} : \frac{17}{5} = \frac{17}{3} \times \frac{5}{17} = \frac{85}{51} = 1 + \frac{34}{51} = 1 + \frac{2}{3}$.

3. A' betüs mennyiségek osztásában a' Jegyek szabályira vigyázni kell, p. o.

$$+\frac{a}{b} : -\frac{c}{d} = +\frac{a}{b} \times -\frac{d}{c} = -\frac{ad}{bc}.$$

2szor A' Tizedes Részletekről.

§. 21. Tizedes Részlet az, mellynek Nevezője az egyen kivül még egynehány Helytartó, és igy 10, 100, 1000, 10,000 's a' t. És igy a' Tizedes Részlet jelent tized részeket, század, ezered, tiz ezered részeket, 's a' t.

A' Tizedes Részletek eredete ez: a' tizedes számlálási endben ~~Jegyben~~ valamelly Jegy, jobb kéz felé menvén, minden következő helyen tizszerte jelent kevesebbet ~~egynél, és igy tized részt~~, — a' követkéznőn ennél ismét tizszerte kevesebbet, és igy század részt, — a' következőn ezered részt, — igy tovább tiz ezered, száz ezred részt 's a' t. — De hogy ezen Részeket az Egészektől megkülömböztessük: tehát az Egészek mellé vonást szoktunk tenni igy: 323, 2345 = 323 Egész, + 2 tized, 3 század, 4 ezered, 5 tizezered rész. — Ha

az előtte valónál és igy század oszlop után tizezer rész pedig Egész nem volna: a' Tizedes Részletek elébe Helytartót teszünk vonással, melly megmutassa, hogy utánna Tizedes Részlet következik, p. o. 0, 234. —

§. 22. Következetek:

1. A' Tizedes Részletek alá nem szükséges Nevezőt irni; mert magában értetik, hogy a' hány Jegy van a' Számlálóban, annyi Helytartó volna az egyen kivül a' Nevezőben, p o. 0, 234 $= \frac{234}{1000}$.

2. Ha valamelly Résznek helyén nem volna semmi, p. o. ha a' Részlet század részen, vagy ezered részen 's a' t. kezdődnék: akkor az üres helyekre Helytartókat kell tenni, p. o. ezt: 5 ezered rész, igy irom le: 0, 005, 's igy mondom ki: Semmi egész, semmi tized, semmi század, öt ezered rész. — Mert ha igy irnám: 0, 5: ekkor öt tized részt tenne. — Ha tehát valamelly Jegynek balfelől Helytartókat teszüuk elébe: a' hányat teszünk, annyi tizszerte tesszük kevesebbé annak értékét, p. o. 0, 5 = öt tized rész, de 0, 05 = öt század rész 's a' t. —

3. Jobb felől akarhány Helytartót rakjunk, az a' Részlet értékét nem változtatja, p. o. 0, 5 = 0, 5000, mert ez csak azt teszi: öt tized rész, + semmi század, + semmi ezered, + semmi tiz ezered rész; és igy semmivel sem több, mint öt tized rész.

4. A' különfajta Tizedes Részleteket igen könnyű tehát egyfajtákká, az az ugyan azon Nevezőjüekké tenni. Ugyan is azok az egyfajták, mellyekben ugyan annyi Jegy van, — mivel csak ugy lesz a' Nevezőjök is ugyan az: tehát a' mellyikben kevesebb Jegy van, kipótolom Helytartókkal annyira, mint a' másik, p. o. 0, 25 és 0, 2567 ezek különfajták, mert az elsőnek Nevezője = 100, a' másiké = 10,000, de egyfajtákká lesznek igy = 0,2500, mert már ennek Nevezője is = 10,000; azonban még sem esett az értékén változás.

§. 23. Láttuk feljebb: mi módon kell akármelly Részletet, más Nevezőjű, de ugyan azon értékü Részletté változtatni, arany regula segitségével. Éppen ugy lehet azt Tizedes Részletté is változtatni, p. o. $\frac{2}{4}$-t igy:

$$\underbrace{4 : 2 = 10}_{4 \mid 20 \mid 5} : x = 5 \text{ és igy } \frac{2}{4} = 0,\ 5.$$

Tehát a' Számláló után teszek egy Helytartót, 's elosztom a' Nevezővel, a' mi kijön, a' lesz a' 10 Számlálója, az az a' lesz = Tizedrész. — Ha ezen Osztásban Maradék marad fenn: a' mellé ismét egy Helytartót teszek, 's ismét elosztom; a' mi itt kijön, a' lessz század rész, vagy is 100-nak Számlálója. — Mert ugy gondolom, mintha most a' kiadott Részletet 100 Nevezőjü Részletté akartam volna változtatni; és igy mintha annak Számlálóját legelőször mindjárt 100-al szoroztam volna, az az utánna két Helytartót irtam volna, 's most onnan hoztam volna le ismét egyet, $\frac{3}{4}$ből. igy

4	30	75 = és igy $\frac{3}{4} = 0, 75.$ —	
	28		
4	20	5	

Ha ismét Maradék volna: ennek ismét Helytartót tennék utánna, 's elosztanám; a' mi kijönne, az lenne 1000-ed rész 's a' t. Néha akármeddig dolgoznánk, mindég maradna Maradék; ez azt mutatja, hogy a' kiadott közönséges Részlet helyett, nem lehet tökéletesen egy értékü Tizedes Részletet csinálni, hanem csak közelités által, — mert az utólsó Jegyek már végheteten kicsinységet jelentenek, 's illyenkor az utólsót inkább eggyel nagyobbá tesszük, p. o.

$\frac{4}{5}$ helyett 5	40	8 = 0, 8, de $\frac{2}{3}$ helyett lesz	
	40		
lesz 3	20	6666 = és igy $\frac{2}{3}$ = 0,66667. —	
	18		
	20		
	2		

A' Tizedes Részletek Algorithmusai.

1ször Öszvezés.

§. 24. 1. Irassanak le egymás alá ugy, hogy az Egészek Egészeknek, Tizedesek Tizedeseknek, Századosok Századosoknak 's a' t. feleljenek meg.

2. Kezdődjék az Öszvezés a' legkisebb részeken, 's ha abból tiz telik, az a' szomszéd nagyobb oszlophoz adassék.

3, Ha a' Tizedes oszlop summájából telik tiz: az az Egyesekhez adassék, — mert ez tizszerte nagyobb a' Tizedeseknél, — 's a' t.

p. o.	22,	5678
	2,	25
	3,	604
Summa	28,	4218.

2szor Kivonás.

§. 25. 1. Irassanak le Egészek Egészek alá, Tizedesek Tizedesek alá 's a' t. mint az öszvezésben.

2. A' Részletek tétessenek egyfajtákká. —

3. Kezdődvén a' kivonás a' legkisebb részeken, csak ugy megy mint a' rendes kivonás. Ha a' Tized részt a' Tized részből ki nem lehetne venni: az egyesektől veszünk egyet, melly itt tiz tized részt tesz. vagy

p. o.	24, 364	5, 2	5, 200
	5, 982	3, 825	3, 825
	18, 382		1, 375
	5, 007	3, 002	
	4, 879	2, 998	
	0, 128	0, 004	

3szor Szorozás.

§. 26. 1. Az Egészek irassanak öszve a' Részletekkel; melly által Lárvás Részlet áll elő, mellyben az Egész éppen ugy megvan, mintha külön állana; mert a' Részletnek előbbeni Nevezője nem nevekedett, p. o.

$$2,\tfrac{36}{100} = \tfrac{200}{100} + \tfrac{36}{100} = \tfrac{236}{100} \;\|\; 2,\tfrac{235}{1000} = \tfrac{2325}{1000}.$$

2. Szoroztassanak egymással a' Szorozók rendes módon.

3. A' Szorozatban annyi Jegy választassék el vonással Részlet gyanánt, a' hány Részletes Jegy van a' két Szorozóban mindöszve, p. o.

$$\left.\begin{array}{r} 2,32 \\ 3,234 \end{array}\right\} = \begin{array}{r} 3234 \\ 232 \\ \hline 6468 \\ 9702 \\ 6468 \\ \hline 7{,}50288 \end{array}$$

Mert a' Részletek Szorozásának Törvénye az, hogy Számláló Számlálóval, Nevező Nevezővel szoroztassék. Itt csak a' Számlálókat szoroztuk; de a' Nevezők szorozását is alatta értjük; és a' Nevezők szorozatjára számot tartunk. Azokat pedig ugy szorozzuk, hogy a' hány Helytartó van a' kettőben, annyi lesz mindöszve a' Szorozatban. Annyi Helytartó van pedig a' két Nevezőben, a' hány Jegy a' két Számlálóban: és igy annyi Helytartónak megfelelő Jegynek kell lenni a' Szorozat Számlálójában is; vagy is annyi Jegyet kell Részletek gyanánt elválasztani, a' hány Részletes Jegy van a' két Szorozóban.

$$0,\ \tfrac{23}{100} \times \tfrac{5}{10} = \tfrac{115}{1000} \qquad \begin{array}{|l} 0,\ 23 \\ 0,\ \ \ 5 \end{array} \qquad \begin{array}{|l} 23 \\ \underline{\ \ 5} \\ 115 \end{array} = 0,\ 115.$$

4. Ha nem volna annyi jegy a' Szorozatban, a' hány Részletes Jegy van a' két Szorozóban: tehát balfelől rakott Helytartókkal kell kipótolni, p. o. 0, 0035 × 0, 05 igy szorozom csak a' Jelentő számokat:

$$\begin{array}{r} 35 \\ \underline{5} \\ \end{array}$$

's lesz a' Szorozat: 0,000175

igy volna egészen:

$$\begin{array}{r} 00035 \\ \underline{0,05} \\ 00175 \\ 00000 \\ \underline{00000} \\ 0,000175. \end{array}$$

5. Ha az egyik Szorozó Egész szám, a' Szorozatban annyi Jegy lesz Részletes, a' hány Részletes Jegy van az egy Szorozóban, p. o.

$$3 \times 2,3 = \begin{array}{r} 23 \\ \underline{3} \\ 6,9 \end{array} \qquad \Bigg| \qquad 4,32 \times 3 = \begin{array}{r} 432 \\ \underline{3} \\ 12,96 \end{array}$$

4szer Osztás.

§' 27. Az Egészek a' Részletekkel öszveiratván, rendes osztás történjék.

2. A' Hányadosban annyi Jegyek választassanak el Rész-

letesek gyanánt, a' hány az Osztandó és az Osztó Részletes Jegyei közti külömbség. Mert az Osztás Törvénye az: hogy Számlálót Számlálóval, Nevezőt Nevezővel osszunk el. Már itt a' Hányados Nevezőjében annyi Helytartó lesz, a' mennyivel több van az osztandó Nevezőjében, mint az Osztójában; Helytartó pedig mindég annyi van a' Nevezőben, a' hány Jegy a' Számlálóban, p. o.

2, 76: 1, 2 | 12 | 276 | 2, 3
24
36
36

teljesen igy lenne:

$$\frac{276}{100} : \frac{12}{10} = \frac{23}{10} = 2,\ \frac{3}{10}. —$$

3. Ha az Osztandóban és Osztóban egyenlő számú Részletes Jegyek vannak: akkor a' Hányadosban nincs Részlet, csak Egész. —

p. o. 4,68 : 0,26

vagy $\frac{468}{100} : \frac{26}{100} = \frac{18}{1} = 18.$ —

vagy 26 | 468 | = 18. —

4. Ha az Osztandóban kevesebb Részletes Jegy van, mint az Osztóban: akkor a' Részleteket egyfajtákká kell tenni, jobbról Helytartókat adván az Osztandóhoz, p. o 11, 2 : 0, 32 = 11, 20 : 0, 32 = 1120 : 32 = 35, 000.

5. Ha az Osztásban maradék volna: ahoz ismét Helytartót tévén, lehet az Osztást folytatni; de azt a' Helytartót ugy nézzük, mintha először az Osztandóhoz adtuk volna, 's onnan hoztuk volna le; és igy ekkor az Osztandó Részlete Jegyekkel szaporodik (ámbár értéke nem változott) 's vigyázni kell, hogy a' hánnyal több Részletes Jegye lessz már ennek, mint az Osztónak: a' Hányadosban annyi Részletes Jegy lessz.

p. o. 0, 5 | 7, 83 | = 1566 = 15, 66.
5
28
25
33
30
30
30
0

mivel már kettővel több Jegy van az Osztandóban, mint az Osztóban.

6. Ha az Osztóban nincs Részlet: a' Hányadosban annyi Részletes Jegy lessz, a' hány van az Osztandóban: p. o.

$3, 32 : 2 = 2 \mid 332 \mid 166 = 1, 66.$

7. Ha pedig az Osztandóban nincs Részlet: annyi Helytartót kell tenni bele Részletes Jegyek gyanánt, a' hány Részletes Jegy van az Osztóban: — vagy ha folytatjuk az Osztást, többet is, p. o.

$5 : 2, 5 = 5, 0 : 2, 5 = 25 \mid 50 \mid = 2$, igy:

$6 : 3, 43 = 6, 00 : 3, 43 = 343 \mid 600^{00} \mid = 174$ vagy: $175 = 1, 75$ mivel már két Jeggyel van több az Osztandóban, mint az Osztóban. —

$$
\begin{array}{r}
600^{00} \\
343 \\
\hline
2570 \\
2401 \\
\hline
1690 \\
1372 \\
\hline
318
\end{array}
$$

NEGYEDIK SZAKASZ.

A' Rangokról és Gyökerekről.

§. 1. Midőn valamelly Mennyiség maga magával szoroztatik, azt igy mondják ki: Rangra emeltetik (elevatur ad potentiam). És a' felvett Mennyiség azon Ranghoz képest Gyökérnek neveztetik (Radix). — Ha egyszer szoroztatik, vagy is kétszer tétetik szorozás által: onnan származik Másodrang vagy Négyleg (Quadratum). És ehez képest a' Gyökér neveztetik Négyleg Gyökérnek (radix quadradica) p. o. $2 \times 2 = 4$; a' 4 a' kettőnek □ rangja; a' 2 pedig a' 4-nek Négyleg gyökere, igy 6, a' 36-nak □ gyökere; a' 36 pedig a' 6-nak □ rangja. —

Ha a' Mennyiség kétszer szoroztatik, vagy is háromszor tétetik Szorozás által, vagy ha a' □ rang még egyszer a' gyökérrel szoroztatik: onnan származik Harmadrang, vagy Koczkarang (Cubus); és a' gyökér ahoz képest Koczkagyökérnek (Radix Cubica) neveztetik, péld. o.

$2\times2\times2=8$, a' 8 a' 2-höz Koczkarang, és a' 2 a' 8-hoz képest Koczkagyökér.

Ha a' Koczkarang ismét a' Gyökérrel szoroztatik: onnan származik Negyedrang, vagy Kettős Négyleg (Biquadratum); és a' gyökér ehez képest Negyed gyökér (radix biquadratica). — Ezután az Ötöd, Hatod 's a' t. Rangok. —

§. 2. A' betüs Mennyiségekben, mivel ugyan azon betüt a' hányszor kellene magát magával szorozni, annyiszor kellene leírni: ezen sokszori leirás helyett, teszünk felibe annyit jelentő Számot, a' hányszor le kellene irni, — és ezen Számot nevezzük Rangjelnek (Exponens). A' Rangjel tehát azt mutatja: hanyadik Rangra van a' betü emelve, ha a' gyökér Rangjele = 1. p. o. a^6 = az a-nak hatodrangja.

Ha tehát valamelly betüt valamelly Rangra kell emelni: szorozom azt magát magával annyiszor, a' hányadik rangra akarom emelni, p. o. a^2-t negyedik Rangra igy emelem; $a^2\times a^2\times a^2\times a^2$ öszveadom a' Rangjeleket $= a^8$. Vagy ugyan ez rövidebben esik, ha a' gyökér Rangjelét annyiszor veszem, a' hanyadik Rangra akarom emelni, $a^{2\times4}=a^8$, igy a^3-nak Koczkarangja lessz $= a^{3\times3}=a^9$. —

Ha az Egytagú Mennyiség több betüből áll: szorozni kell magát magával annyiszor, a' hanyadik Rangra kell emelni, p. o. ab^2c^3nak Koczkarangja lesz $ab^2c^3\times ab^2c^3\times ab^2c^3= a^3b^6c^9$. Vagy ugyan ez rövidebben esik, ha mindenik betü Rangjelét szorozom a' kivánt Rangjelével, p. o. ab^2c^3nak Koczkája $= a^3b^6c^9$; — $a^2b^3c^4$nek $= a^6b^9c^{12}$. —

Ha Részletet kell Rangra emelni: annak mind Számlálóját, mind Nevezőjét az előadott módon emelni kell, p. o.

$\frac{2}{3}$ másodrangja $= \frac{4}{9}$, $\frac{a^2}{bc^2}$nek Koczkája $\frac{a^6}{b^3c^6}$. —

§. 3. A' Páros rangok mint a' másodrang, negyedrang, hatodrang 's a' t. Nemlegesek nem lehetnek; mert azoknak gyökerek akár Tettleges, akár Nemleges légyen, — a' szorozásban ezen Rangok mindég Tettlegesekké lesznek, p. o. $+a\times+a=+a^2$, igy $-a\times-a=+a^2$. De a' Páratlan Rangok jele ugyan az, a' mi a' gyökéré, p. o. $+a\times+a=+a^2$ és $+a^2\times+a=+a^3$, — de $-a\times-a=+a^2$, és $+a^2\times-a=-a^3$, — tovább: $-a^3\times-a=+a^4$, de

$+a^4 \times -a = -a^5$'s a' t. A' Páros Rangok gyökerét tehát gyakran nem lehet bizonyosan tudni, ha Tettleges e vagy Nemleges; — hanem a' környülállásokból fog utoljára kiünni; addig pedig mind a' két jelt eleibe kell tenni p. o. a^2-nek □ gyökere $\pm a$. —

§. 4. A' melly betűnek Rangjele 0: annak értéke $= 1$, p. o. $a^0 = 1$, $b^0 = 1$. Mert $\frac{a}{a} = a^0$, azomban $\frac{a}{a} = 1$, mivel az a-t az a-ban egyszer találjuk meg; már a' mellyek egy harmadikkal egyenlők, magok közt is egyenlők, — és igy $a^0 = 1$. És ha ez több Betük közt Szorozóképpen áll: elmaradhat; p. o. $a^0 b^2 = b^2$, $ab^0 c^2 = ac^2$. —

§. 5. Az ollyan Rangnak, mellynek Rangjele Nemleges, mint a^{-2} értéke $= 1$, elosztva a' Mennyiségnek ugyan azon Tettleges Rangjával, p. o. $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$. Ugyan is a' Tettlegesség és Nemlegesség egészen külömböző, 's ellenkező tulajdonságok; az egyik felfelé megy, a' másik lefelé; ha az egyik szoroz, a' másik oszt. Elindulván tehát egy középponttól, t. i. $a^0 = 1$-től, a' Tettleges Rangjel szorozással megy felfelé; a' Nemleges pedig osztással lefelé igy: $a^1 = a^0 \times a$, de $a^{-1} = \frac{a^0}{a} = \frac{1}{a}$ igy $a^3 = a^0 \times a \times a \times a$; de $a^{-3} = \frac{a^0}{a \times a \times a}$, vagy $\frac{1}{a^3}$. — És igy a' Tettleges és Nemleges Rangok közt az a' külömbség, hogy a' hány egyet tesz a' Tettleges; annyid részét teszi az egynek a' Nemleges Rang, p. o. legyen $a = 2$, $a^6 = 64$, de $a^{-6} = \frac{1}{a^6} = \frac{1}{64}$. Ugyan ezt rövideden igy is meg lehet mutatni: $\frac{a^2}{a^4} = a^{2-4} = a^{-2}$. De ha $\frac{a^2}{a^4}$ elosztom egy Közösmérővel a^2val, lesz $= \frac{a^0}{a^2} = \frac{1}{a^2}$. És igy $\frac{a^2}{a^4} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$; és igy $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$. —

§. 6. A' Gyökér Jele ez: ($\sqrt{}$), mellybe ha Négyleg gyökeret akarunk jelenteni, semmi számot nem irunk, ha pedig harmadik, negyedik, 's a' t. gyökeret értünk, bele tesszük annak számját, p. o. $\sqrt{ab}$: azt teszi: a b-nek Négyleg gyökere, $\sqrt[3]{ab}$ = a b-nek Koczkagyökere.

A' Gyökér vagy Ép, vagy Csonka, vagy Képtelen:

Ép-gyökér az, melly a' megfelelő Rangot a' szükséges szorozás által teljesen kiadja. Még pedig ha Egész szám, Részlet nélkül: akkor neveztetik Egész-Ép-Gyökérnek (radix perfecta) p. o. $\sqrt{81} = 9$. — Ha pedig Ép ugyan a' Gyökér: de az egész mellett Részlet is van benne: neveztetik Részletes-Ép-gyökérnek (radix rationalis) p. o. $\sqrt{5,29} = 2,3$. —

Csonka Gyökér (radix manca seu irrationalis) az, melly akármeddig folytatott részletekkel sem adja ki tökéletesen a' felvett rangot, p. o. $\sqrt{7} = 2,645751 3$.

Képtelen Gyökér (radix imaginaria vel surda) volna pedig az, mellyet valaki Nemleges Páros rangokból keresne, p. o. $\sqrt{-4}$. —

§. 7. Kéttagú Gyökeret Négyleg Rangra emelni.

Akármelly Kéttagú Mennyiségnek képviselője lehet ez: $a+b$ vagy $-a-b$ vagy $-a+b$ vagy $+a-b$. Ha mind a' kettőnek jele vagy $+$ vagy : $-$ akkor az önn magával való szorozásból ezen Négyleg rang származik: $a^2+2ab+b^2$.

Ha pedig egyiknek akármellyiknek jele $-$, a' másiké $+$: akkor e' lesz a' □ rang $a^2-2ab+b^2$. Ebben azt látjuk, hogy a' kéttagu Gyökér □ rangja három tagból áll, még pedig:

1. Az első tag, az első gyökértagnak □ rangja $=a^2$. —

2. A' második Tag ollyan szorozat, mellynek szorozói az első gyökértag kétszer véve, és a' másik gyökértag

$$=2ab=2a\times b.$$

3. Harmadik Tag a' másik Gyökértag □ rangja $= b^2$. —

A' jelekre nézve pedig: ha a' gyökértagok egyjelűek: akkor a' □-legnek minden tagja $+$; ha pedig ellenkező jelűek: akkor a' középső Tag $-$ a' többi $+$. — Ezen forma szerént akármelly kéttagu mind betűs, mind számjegyes mennyiséget könyen lehet □ rangra emelni, p. o.

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$$
$$(2a+\tfrac{1}{2}b)^2=4a^2+2ab+\tfrac{1}{4}b^2$$
$$(\tfrac{2}{3}a^2+\tfrac{3}{4}b)^2=\tfrac{4}{9}a^4+a^2b+\tfrac{9}{16}b^2, \text{ — igy}$$
$$25=(20+5)^2=20^2+2\times20\times5+5^2, \text{ igy}$$
$$(2c+3d^2)^2=4c^2+12cd^2+9d^4, \text{ igy}$$
$$(g^2-ab)^2=g^4-2g^2ab+a^2b^2, \text{ igy}$$
$$(-e^2+3b^3c)^2=e^4-6e^2b^3c+9b^6c^2. \text{ —}$$

§. 8. **Több Tagu Gyökeret Négyleg rangra emelni:** éppen ezen forma szerént lehet. Ugyan is akárhány tagu legyen, gondoljuk ugy, mintha kéttagu volna, t. i. az utolsó tag előtt valókat egynek vévén $=$ a —, az utolsót pedig másiknak $=$ b; 's az $a+b$ szerént emeljük fel, p. o. $(e+f+g)^2$, $(e+f)=a$, és $g=b$, lessz hát a' □ rang $(e+f)^2+2(e+f)\times g+g^2$. Mellyet ha teljesen kicsinálunk: igy lessz:

$$(e+f)^2=e^2+2ef+f^2$$
$$2(e+f)\times g=2eg+2fg$$
$$g^2=g^2, \text{ —}$$

áll tehát mindenik gyökértag □ rangjából, és mindenik gyökértag kettőzetéből szorozva a' többiekkel, — igy: $(e+2f+ab+2c^2)^2=(e+2f+ab)=a$ és $2c^2=b$, lesz hát $=(e+2f+ab)^2+2(e+2f+ab)\times2c^2+4c^4$, teljesen

$$(e+2f+ab)^2=e^2+4ef+4f^2+2eab+4fab+a^2b^2$$
$$2(e+2f+ab)\times2c^2=4ec^2+8fc^2+4abc^2$$
$$=4c^4=4c^4,$$

igy megy az öt, hat, 's a' t. taguaké is. —

§. 9. **Kéttagú Mennyiséget Koczkarangra emelni.** Akármelly kéttagú mennyiségnek képviselője lehet az $\underline{a+b}$. Ennek Koczkarangja ez:

$a^3+3a^2b+3b^2a+b^3$. — Ebben azt látjuk, hogy a' kéttagu Gyökér Koczkarangja négy Tagból áll, u. m.

1-ső az első gyökértag koczkája.

2-ik az első gyökértag □ rangjának hármazatja szoroztatva a' másik gyökértaggal.

3-ik a' másik gyökértag □ rangjának hármazatja szoroztatva az első gyökértaggal. —

4-ik a' másik gyökértag Koczkarangja. — Ezen forma szerént könnyü Koczkarangra emelni, akármelly kiadott, mind betüs, mind számjegyes kéttagú mennyiséget.

p. o. $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3y^2x + y^3$.

igy $(20 + 5)^3 = 20^3 + 3 \times 20^2 \times 5 + 3 \times 5^2 \times 20 + 5^3$

igy $(2a + 3b^2)^3 = 8a^3 + 36a^2b^2 + 54b^4a + 27b^6$ —

igy $(\frac{2}{3}a^2 + \frac{3}{4}b)^3 = \frac{8}{27}a^6 + a^4b + \frac{54}{144}b^2a^2 + \frac{27}{64}b^3$.

§. 10. Több Tagú Mennyiséget is ezen forma szerint lehet Koczkarangra emelni, ha ugy nézzük azt, mint Kéttagút, a' feljebbi módon, p. o.

$(x + y + z)^3$ $(x + y) = a$ és $z = b$ —

lessz $a^3 = (x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3y^2x + y^3$.

$3a^2b = 3(x + y)^2 \times z = (x^2 + 2xy + y^2) = 3x^2z + 6xyz$

É $+ 3y^2z$ $3b^2a = 3z^2 \times (x + y) = 3z^2x + 3z^2y$.

$b^3 = z^3$. —

És igy $(x + y + z)^3$ lessz =

$x^3 + 3x^2y + 3y^2x + y^3 + 3x^2z + 6xyz + 3y^2z + 3z^2x + 3z^2y + z^3$ = tiz tag. —

Jegyzék. A' Számokban az Egytől a' 10-ig lévőknek Négyleg és Koczkarangjait mutatja ezen Táblácska:

gyökér	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
□ r.	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Kr.	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

Ebből ezeket láthatni:

a. Mivel a' legnagyobb egytagú Számnak t. i. a' 9-nek □ rangja két tagból áll = 81, és már a' tízé háromból = 100: tehát a' két tagnál többől álló Mennyiségnek □ gyökere bizonyosan egy tagnál többől áll.

b. Mivel a' legnagyobb Egytagú Számnak t. i. a' 9-nek Koczkája három tagból áll = 729: tehát a' három tagnál többől álló Mennyiségnek Koczkagyökere nem lehet egytagú szám.

Gyökér-fejtésről.

§. 11. Valamelly Mennyiségnek valahányadik Gyökerét kifejteni annyit tesz, mint ollyan mennyiséget keresni, mellyet ha magát magával annyiszor szorozzuk, a' hányadik Gyökeret kell keresnünk, tehát kiadja a' feltett Mennyiséget mint Rangját. Lássunk külön eseteket.

I. **Betüs egytagú mennyiségből akármelly gyökeret fejteni:** úgy lehet, ha a' betünek, vagy betüknek Rangjelét elosztjuk annyival, a' kányadik gyökeret keressük. Mert Rangra úgy emeltük, hogy a' Rangjelt szoroztuk; — a' gyökérfejtés pedig éppen ellenkező a' Rangra emeléssel: és igy itt ellenkezőt, t. i. Osztást kell csinálni, p. o. $\sqrt{a^2} = a$, $\sqrt[3]{a^3} = a$ $\sqrt{a^4} = a^2$ $\sqrt[3]{a^5} = a^{\frac{5}{3}}$ $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$

$$\frac{\sqrt{a^2 b^4}}{c^2} = \frac{a b^2}{c}, \quad \sqrt{4 a^2} = 2 a.$$

§. 12. II. **Betüs Többtagú Mennyiségből □ gyökeret fejteni.**

Minden két tagból származható □ rangban ezeknek kell meglenni: $a^2 + 2 a b + b^2$ melly, az $a + b$-nek □ rangja. És igy ezeket kell csinálni:

a. Mivel a' □ rang első tagjában megvan az első gyökértag □ rangja: tehát az első tag □ gyökerét keressük ki, írjuk oldalról, — emeljük □ rangra, 's az első tagból vegyük ki; — ha maradék van, jegyezzük meg. —

b. Mivel a' kiadott □ rang második tagjában meg van $= 2 a b$; vagyis mivel az ollyan szorozat, mellynek egygyik Szorozója az első gyökértag kettőzetje, másik Szorozója pedig a' második gyökértag: tehát osszuk el azt mint szorozatot az egyik Szorozójával, t. i. a' már kitalált első gyökértag kettőzetével, 's ki fog jönni, mint másik Szorozója, a' második gyökértag. Ezt illő jelével írjuk az első gyökér tag után. —

c. Mivel a' kiadott □ rangban megvan $\underline{2 a b} + \underline{b^2}$: tehát ezeket ki kell csinálni, és belőle ki kell venni. T. i. az első gyökértag kettőzetét szorozni kell a' második gyökértaggal $= \underline{2 a b}$; és a' 2dik gyökértagot □ rangra kell emelni: 's ezeket ki kell venni a' kiadott □ rangból. Ha ekkor semmi maradék nincs: úgy a' gyökér két tagból áll.

Ha pedig még fenn volna a' □ rangban három tag: úgy még harmadik gyökértagot kell keresni igy:

d. Mivel a' még fenn lévő tagokban meg van az első gyökértagnak is, a' másodiknak is kettőzetje, szoroztatva a' harmadikkal: tehát a' már kijött két gyökértagot nézzük úgy mint e g y e t = a, és azoknak kettőzetjével osszuk el a' két következő tagot; vagy elég lessz csak az egyiknek kettőzetével elosztani a' következő tagot; 's ekkor ki jön a' 3ik gyökértag, mellyet most ugy nézünk, mint 2dikat = b. Ismét a' $2ab + b^2$-t ki kell csinálni: az az ezen új gyökértaggal szorozni kell mind az első, mind 2dik gyökértagnak kettőzetét; — és ezen új gyökértagot □ rangra emelni; — 's mind ezeket a' □ rangból ki kell szedni. — Ha még ekkor is maradna fenn 4 tag: keresni kell 4dik gyökértagot ezen módon. — Ha pedig a' feljebbi esetben háromnál, itt pedig 4nél kevesebb tag maradt volna fenn a' kiadott □ rangban: akkor ott ugyan 3dikat, itt pedig 4dik gyökértagot keresni nem lehet; hanem azt mutatja, hogy a' kiadott □ rangnak nincs Ép gyökere. —

Egyébaránt néha megesik, hogy kevesebb Tag láttatik maradni, mint szükséges volna; 's azomban még is lehet fejteni új gyökértagot, mivel több tagok öszve vannak fogva, — p. o.

$$1,\ \sqrt{\begin{pmatrix} x^4 + \underline{2x^2y} + y^2 + \underline{2x^2z} + 2yz + z^2 \\ x^4 \quad 2x^2 \qquad\quad 2x^2 \end{pmatrix}} = x^2 + y + z$$

$$\begin{array}{ccccc} \underline{+2x^2y} & \underline{+y^2} & \underline{+2x^2z} & \underline{+2yz} & \underline{+z^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$2,\ \sqrt{\begin{pmatrix} y^4 + \underline{4y^3} - 8y + 4 \\ y^4 + 2y^2 \end{pmatrix}} = y^2 + 2y - 2$$

$$\begin{array}{ccc} \overline{0} \cdot & \underline{4y^3} & \underline{+\ 4y^2} \\ & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccc} \text{maradék} = & -\ 4y^2 & -\ 8y & +\ 4 \\ & +\ 2y^2 & & \\ & -\ 4y^2 & -\ 8y & +\ 4 \\ & + \text{—} & + \text{—} & \text{—}\ \text{—} \\ & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

§. 13. III. Számjegyes Mennyiségből □ gyököret fejteni.

A' Számjegyes □ rangban is ezek vannak meg: $a^2 + 2ab + b^2$, de nem külön tagokban, hanem öszve olvasztva. Tehát ezeket kell cselekedni:

a. A' kiadott Mennyiséget jobb felől kezdvén Oszlopokra kell osztani, két két Jegyet adván egy Oszlopnak; — a' balfelöli utolsóban egy is lehet; azért mert az egyes Számoknak Négyleg rangjok vagy egy vagy két tagú nagyobb nem. És igy a' hány Oszlop van: annyi tagú lessz a' gyökér p. o. $\sqrt{3 \mid 69 \mid 72}$ = lessz három tagú:

b. Az első Oszlopban meg van az a^2 azaz, az első Gyökértag □ rangja. Ennek tehát kell venni legközelebbi Gyökerét, — 's oldalról írni = a; — ezt □ rangra emelni 's az első oszlopból ki venni, a' maradékot feljegyezni.

c. A' második Oszlopnak első Jegyében az elébbi maradékkal együtt meg van a $\underline{2ab}$ azt tehát lehozván a' maradékhoz: ki kell keresni, a' $\underline{b}$-t = a' második Gyökértagot elosztván azt $\underline{2a}$-val, az az, a' már kitalált első Gyökértag kettőzetével. Ekkor ki kell csinálni a' $\underline{2ab}$-t azaz, az elébbi osztót = 2 a — t szorozni kell az új Gyökértaggal = $\underline{b}$. Ezen $\underline{2ab}$-t ki kell venni, — 's a' maradékot leírni. Tovabbá a' második Oszlop 2dik Tagjában, az elébbi maradékkal együt meg van a' $\underline{b^2}$ = a' második Gyökértag □ rangja. Ezt hát abból ki kell venni p. o.

$$\sqrt{(a^2 + 2ab + b^2)} = \sqrt{12 \mid 96} = \begin{matrix} a + b \\ 36 \end{matrix}$$

$$\begin{array}{rl|l}
 & a^2 = 9 & \\
\hline
2ab = & 3 \mid 9 & \\
(2a) = 6 & & \\
2ab = & 36 & \\
\hline
 & b2 = 36 & \\
 & b2 = 36 & \\
\hline
 & 00 &
\end{array}$$

d. Ha harmadik oszlop is van: annak első Tagjában a' maradékkal együtt ismét $\underline{2ab}$ van meg; el kell hát azt osztani $\underline{2a}$ — val; de már most a = az eddig talált két Gyökértag, és igy ezeknek kettőzetével kell osztani, 's kijön a' 3dik Gyökértag; — ezzel szorozván, az elébbi osztót, lessz $= \underline{2ab}$ ezt ki kell venni. — Ezen Oszlop második Tagjából is a' maradékkal együtt ki kell venni b^2-t. — Ha még több Oszlopok is volnának: éppen igy kell keresni 4dik 5dik 's a' t. Gyökértagot. p. o.

$\sqrt{18 \mid 92 \mid 25} = 435$

```
 √ 18 | 92 | 25  =  435
   16 |    |
  ----
  8|2 | 9
   |2 | 4
  -----------
       52
        9
      -----------
  86 | 4 3 2
     | 4 3 0
     -----------
      — — 2 5
          2 5
        -------
          0 0
```

e. Néha megesik, hogy a' Gyökértag kettőzetét az osztandóban egyszer sem lehet megtalálni, illyenkor következő Gyökértag lesz $= \underline{0}$; 's ezen Oszlopot egészen lehozván által kell menni a' következő oszlopra 's folytatni kell a' szokott munkát p. o.

$\sqrt{16 \mid 48 \mid 36} = 406$

```
 √ 16 | 48 | 36  =  406
   16 |    |
  ----
    8 | 48
   80 | 483
        480
      --------
          36
          36
        ------
          — —
```

f. Ha egészekből és Tizedes részletekből kell Gyökeret fejteni: ugy kell el osztani oszlopokra, hogy a' részletek külön oszlopokat formáljanak; 's ha belőlök ép oszlop nem telne: Helytartóval jobbról pótolni kell; egyébaránt csak a' szokott módon fejteni a' Gyökeret; — az egészekből egész

— a' részletekből részletes Gyökér jön ki. p. o. √3169, 7, így osztom oszlopokra

```
√ 31 | 69 | 70 = 56, 3
  25
 ---
  10|66
    |60
    ---
     69
     36
    ---
 112|337
    |336
    ---
     10
      9
    ---
      1
```

g. Ha az utolsó oszlopból is maradék van: ez azt mutatja, hogy a' Gyökér nem ép. De lehet közelgetés által a' részleteket is keresni, ha két két Helytartóból uj oszlopokat csinálunk; — 's a' fellyebbi módon dolgozunk p. o.

```
√ 15|00|00 = 3, 87        √ 19|45|00|00|00 = 44, 102
   9                           16
 ---                          ---
  6|60                        8|34
   |48                         |32
   ---                         ---
  120                          25
   64                          16
   ---                         ---
 76|560                       88|90
   |532                         |88
   ---                          ---
  - 280                          20
     49                           1
                                ---
                             882|190
                            8820|19000
                                |17640
                                ---
                                13600
```

§. 14. IV. Betűs több Tagu mennyiségből Kotzkagyökeret fejteni.

Minden kéttagu Gyökérből származó koczka rangban ezeknek kell meg lenni: $\underline{a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3}$. És igy ezeket kell csinálni:

a. A' kiadott koczka rang első tagjából koczka gyökerét kell venni; a' lesz az első Gyökértag; — azt koczka rangra emelni 's az első tagból kivonni.

b. Mivel a' második tag $= 3a^2b$ az az ollyan szorozat, mellynek egyik szorozója $= 3a^2$ az az, az első Gyökértag □ rangjának hármazatja; a' másik szorozója pedig $= \underline{b}$ az az a' második Gyökér tag. Tehát ezen következő tagot el kell osztani, a' már ki jött első Gyökértag □ rangjának hármazatjával 's a' hányados lesz $= \underline{b}$ az az a' második Gyökértag.

c. Ekkor ki kell csinálni ezen 3 tagot: $\underline{3a^2b + 3ab^2 + b^3}$'s mind ezeket a' koczka rangból kivonni; ha maradék nincs: ugy a' Gyökér két tagú p. o.

$$\sqrt[3]{\left(\tfrac{1}{8}a^3 - \tfrac{1}{2}a^2b^2 + \tfrac{2}{3}b^4a - \tfrac{8}{27}b^6\right)} = \underline{\tfrac{1}{2}a - \tfrac{2}{3}b^2}$$

$$\begin{array}{l} \underline{= \tfrac{1}{8}a^3} + \tfrac{3}{4}a^2 \\ \quad 0 \\ \qquad \underline{\mp \tfrac{1}{2}a^2b^2 \pm \tfrac{2}{3}b^4a \mp \tfrac{8}{27}b^6} \\ \qquad\quad 0 \qquad\quad 0 \qquad\quad 0 \end{array}$$

d. Ha pedig még marad fen 6 tag (vagy ha szintén azok kevesebb tagokba vannak is öszve téve) keresni kell harmadik Gyökértagot, ugy hogy a' már ki jött két Gyökértagot, egynek nézzük $= \underline{a}$, 's azoknak □ rangjok hármazatjával, vagy is abból csak az első taggal elosztjuk a' kiadott koczka-rang következő tagját 's a' hányados lesz a' 3dik Gyökértag, mellyet most másodiknak nézünk $= b$. Ekkor ismét ki kell csinálni a' $\underline{3a^2b + 3b^2a + b3}$-t mellyből most 6 tag telik 's ezeket ki szedem 's a' t. p. o.

$$\sqrt[3]{(8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3 - 36a^2c}$$

$$\begin{array}{l} \underline{\pm 8a^3} + 12a^2 \\ \quad 0 \quad \underline{+12a^2b} \pm \underline{6ab^2} \pm b3 + 12a^2 \\ \qquad\quad 0 \qquad\qquad 0 \qquad\quad \mp 36a^2c \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} -36abc - 9b^2c + 54ac^2 + 27bc^2 - 27c^3 \\ \underline{\mp 36abc \mp 9b^2c \pm 54ac^2 \pm 27bc^2 \mp 27c^3} \end{array}\right\} = 2a + b - 3c$$

$$0 \qquad 0 \qquad 0 \qquad 0 \qquad 0$$

§. 15. V. Szám jegyes mennyiségből Koczkagyökeret fejteni.

A' szám jegyes Koczkarangban is ezek vannak meg $\underline{a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3}$ de öszve olvadva. Tehát ezeket kell csinalni.

a. A' kiadott koczka rangot ell kell osztani oszlopokra, jobról kezdve hármat hármat vévén egy oszlopba, — a' balfelőli utolsóban kevesebb is lehet.

b. Az első oszlopban meg van az $\underline{a^3}$ abból hát ki kell keresni az $\underline{a}$-t az az, az első Gyökértagot, — azt Koczkarangra emelni, — 's kivonni.

c. A' következő oszlop első tagjában az elébbi maradékkal együtt meg van a' $\underline{3a^2b}$; és így osszuk el azt $\underline{3a^2}$-val azaz, az első Gyökértag □ rangjának hármazatjával, 's kijőn a' $\underline{b}$ azaz a' másódik Gyökértag. Ekkor ki kell csinálni a' $\underline{3a^2b}$ — t, 's kivonni.

d. Az oszlop 2dik tagjában a' maradékkal együtt meg, van a' $\underline{3b^2a}$, azaz a' 2dik Gyökértag □ rangjának hármazatja szorozva az első Gyökértaggal: ezt hát ki kell csinálni, 's ki vonni.

e. Az oszlop 3dik tagjában, a' maradékkal, meg van $\underline{b^3}$ az az a' második Gyökkértag' Koczkarangja, ezt hát ebből ki kell vonni.

f. Ha még van fenn oszlop: tehát keresni kell 3dik Gyökértagot az elébbi módon, — a' már kijött két Gyökértagot első helyett vévén $= \underline{a}$.

g. Ha valamelly osztót nem találunk meg az osztandójában: ekkor azon oszlopnak Gyökértagja $= \underline{o}$. Lehozván tehát azt az egész oszlopot, a' következő oszlopra kell által menni, — 's a' szokott módon keresni következő Gyökértagot, — minden eddig kijött Gyökértagokat együtt véve első gyanánt nézvén $= \underline{a}$.

h. Ha az utolsó oszlopból is van maradék: akkor nincs ép gyökér; tehát közelgetés által kell keresni részleteket, 3 Helytartóból új oszlopot csinálván; 's a' szokott fejtés modját követvén; az eddig kijött Gyökértagok mellé, mivel azok egészek, vonást tevén. p. o.

I. $\sqrt[3]{103 \mid 823} = \overset{a\,b}{47}$

$a^3 = 64$

$3a^2 = 48 \mid 398$

$3a^2b = \mid 336$

$= 622$

$3ab^2 = 588$

$= 343$

$b^3 = 343$

II. $\sqrt[3]{9 \mid 528 \mid 128} = \underbrace{\overset{ab}{21}}_{a}\,\frac{2}{6}$

$a^3 = 8$

$3a^2 = 12 \mid 15$

$3a^2b = \mid 12$

32

$3b^2a = 6$

268

$b^3 = 1$

$3a^2 = 1323 \mid 2671$

$3a^2b = \mid 2646$

$-\,-\,252$

$3b^2a = 252$

$-\,-\,-\,8$

$b^3 = 8$

0

III. $\sqrt[3]{8 \mid 365 \mid 427} = 303$

8

$— \mid 365$

12

$1200 \mid 3654$

3600

$-\,-\,542$

540

27

27

$-\,-$

IV. $\sqrt[3]{25 \mid 000 \mid 000} = 2,\ 92$

8

$12 \mid 170$

108

-620

486

1340

729

$2523 \mid 5110$

5046

$-\,-\,640$

348

2920

8

ÖTÖDIK SZAKASZ.

Egyenletek Tudománya.

§. 1. Egyenletnek neveztetik ugyan azon mennyiségnek kétformában való kifejezete, öszve kötve az egyenlőség jelével, p. o. $12 = 10 + 2$, $8 + 4 = 15 - 3 = \frac{96}{8} = 3 \times 4$; $2^2 = \sqrt{16}$.

Az Egyenlet tehát két Részből áll, mellyek közül mindenik ugyan azon mennyiséget fejezi ki, és akármellyik rész legyen a' Jel előtt vagy utánna mind egy. — Mindenik részben több tagok lehetnek.

§. 2. Az Egyenlet Részeit sokképpen lehet változtatni a' nélkül, hogy azoknak egyenlőségek felbomlana. És mind azon változások, az egyenlőséget illető, 's már feljebb előadott Nyilván valókon épülnek. Nevezetesen:

1. Ha az Egyenlőkhöz egyenlők adatnak; vagy ha az egyenlőkből egyenlők vétetnek el: az egyenlőség nem változik. Innen folynak e' következők:

a. Ha az Egyenlet mindenik részében ugyan azon tag ugyan azon Jellel fordúl elő: azt mindenik részből ki lehet hagyni, p. o. $10 + 5 = 8 + 5 + 2$. Lesz: $10 = 8 + 2$; $a + b = c + b$, lesz: $a = c$.

b. Az Egyenlet egyik részéből a' másikba akármelly tagot által lehet vinni ellenkezőre változtatott jellel.

Mert ha a' $+$ jelü tagot egyik részből elveszem: azt annyival kevesitettem; és igy a' másik részt is annyival kell kevesíteni; az az ugyan azon tagot $-$ Jellel oda tenni, p. o. $20 = 15 + 5$ lesz $20 - 5 = 15$. — Ha pedig $-$ jelű tagot veszek el egyik részből: azt annyival szaporítom; és igy a' másik részt is annyival kell szaporítani, az az ugyan azon tagot $+$ jellel által vinni; p. o. $20 = 25 - 5$ lesz $20 + 5 = 25$.

c. Két Egyenleteket egymással öszve lehet adni, p. o.

$$\begin{array}{lrcl} & 12 + 3 & = & 20 - 5 \text{ és} \\ & 15 - 9 & = & 2 + 4 \\ \hline \text{öszveadva} & 12 + 3 + 15 - 9 & = & 20 - 5 + 2 + 4 \\ & = 21 & & = 21 \end{array}$$

d. Két Egyenletet egymásból ki lehet vonni; p. o.

$$12 + 3 = 20 - 5$$
$$\pm 15 \mp 9 = -2 \pm 4$$

lesz $12 + 3 - 15 + 9 = 20 - 5 - 2 - 4$
$= 9 \qquad = 9$

2. Ha az Egyenlők Egyenlőkkel szoroztatnak, vagy osztatnak el: az egyenlőség nem változik. — Innen folynak ezek:

a. Lehet az Egyenlet' mindenik részét és azoknak minden tagjait ugyan azon mennyiséggel akár szorozni, akár osztani: p. o. $2 + 3 = 9 - 4$ szorozva 3-al $= 6 + 9 = 27 - 12$. — Igy: $an + bn = 3xn - cn$ elosztva n-el, lesz $= a + b = 3x - c$.

b. Ha minden tagnak ugyan az az osztója van: azt mindenik alól elhagyhatom, mert ez által mindenik tagot ugyan annyiszorta tettem nagyobbá, p. o.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{x}{b} \text{ lesz } = a + c = x.$$

c. Ha az Egyenlet' valamellyik része szorozókkal van kifejezve; egyik szorozót, a' mellyiket tettzik, elhagyhatom, — és az annyit tesz, mintha azon egész Mennyiséget t. i. a' két szorozó szorozatját ugyan annyival elosztottam volna; tehát a' többi tagokat is mind ugyan annyival kell elosztani.

p. o. $3 \times 4 = 20 - 8$ lesz $4 = \frac{20 - 8}{3}$ vagy $3 = \frac{20 - 8}{4}$.

igy $ab = c - d$ lesz $a = \frac{c - d}{b}$ vagy $b = \frac{cd}{a}$.

Jegyzék. Sokszor szükséges valamelly részt szorozókkal fejezni ki, hogy valamelly betüt magában hagyhassunk. Ez úgy esik, ha azzal a' betüvel az egész részt elosztjuk, 's akkor kijön a' másik szorozó p. o. $ax - 2x = b + c$
az első részt x-el elosztva lesz a' két szorozó

$$x(a - 2) = b + c \text{ és } x = \frac{b + c}{a - 2}.$$

d. Ha valamelly tagnak Öszvezőjét elhagyom: azt annyiszorta tettem kevesebbé; tehát ugyan azzal a' többi tagokat is el kell osztani, p. o. $3x = a + b$ lesz $x = \frac{a + b}{3}$.

e. Valamelly részletes Tagnak ha a' nevezőjét elhagyom; — azt annyiszorta teszem nagyobbá: és igy a' többi Tagokat is ugyan azzal szorozni kell; — 's igy lehet az Egyenletből a' Részleteket kiirtani, p. o. $\frac{12}{3} + 2 = 6$ lesz $12 + 6 = 18$; $\frac{a}{b} = c$ lesz $a = bc$. — $\frac{x}{3} = a$ lesz $x = 3a$.

f. Ha valamelly Egyenletnek minden tagját — 1-el szoroznék, vagy elosztanék; az által az egyenlőség nem változnék, azomban a' tagok csak ugyan azok maradnának, de azoknak Jelei mind ellenkezőkre változnának. És igy ha az Egyenlet minden Tagjait ellenkező Jelüekké változtatjuk: az egyenlőség megmarad p. o.

$$\begin{array}{l} 12 - 3 = 15 - 6 \\ -1 \\ \hline -12 + 3 = -15 + 6. \end{array}$$

g. Ha az egyenletnek mindenik Részét ugyan azon rangra emeljük: az egyenlőség nem változik, mert ez csak annyit tesz, hogy mindenik részt magát magával ugyan annyiszor szorozzuk. De külön a' Tagokat emelni nem jó volna: hanem az egész részt öszve véve. p. o.

$$2 + 3 = 8 - 3 \text{ lesz } = (2 + 3)^2 = (8 - 3)^2$$
$$\text{igy } \sqrt{25} = 8 - 3 \text{ lesz} = 25 = (8 - 3)^2.$$

h. Ha az Egyenlet mindenik részének ugyan azon gyökerét veszük: az egyenlőség nem változik; mert ez annyit tesz, mintha mindenik része ugyan azzal, t. i. a' gyökérrel ugyan annyiszor osztanánk el. p. o. $64 = 42 + 22$ lesz:

$$\sqrt{64} = \sqrt{42 + 22}. \text{ igy } 8^2 = 64 \text{ lesz } 8 = \sqrt{64};$$
$$2^3 = 8 \text{ lesz } 2 = \sqrt[3]{8}.$$

§. 3. Az Egyenletek leginkább az **Algebrai Feladatok'** (Problema Algebraicum) megfejtésökre szolgálnak. Ugyan is minden **Feladatban** azt kivánják, hogy némelly kiadott esmeretes Mennyiségekből egy vagy több esmeretlenek találtassanak ki, — figyelmezvén az esmereteseknek az esmeretlenekkel való öszvefüggésökre; és ezen öszvefüggésekből, Egyenletet csinálván. — Az esmert Mennyiségek az

A b c é elsőbb betüivel, — az esmeretlenek pedig az utolsókkal x, y, z, 's a' t. szoktak kifejeztetni.

A' Feladatok vagy Határozottak vagy Határozatlanok. — Határozott Feladat az, mellyben az esmeretlenek, vagy esmeretleneknek csak egy valamelly értékök van; vagy is a' melly Feladatot, csak egy képpen lehet megfejteni. És az illyen Feladatokban annyi Egyenletet lehet csinálni a' hány esmeretlen Mennyiség van. — Határozatlan pedig az, mellyet többképpen is meg lehet fejteni. És ezekben nem lehet annyi Egyenletet csinálni a' hány az esmeretlen.

Továbbá a' Feladatok vagy Első ranguak, vagy Másod ranguak. Első ranguak azok, mellyekben az esmeretlen mindég csak az első rangban jön elő p. o. $x + 3ax = b + c$. — Másod ranguak azok, mellyekben az esmeretlen másod rangra emelve fordúl elő. — Ha az esmeretlenek ennél felsőbb rangon fordulnak elő: azok Felsőbb ranguak 's azoknak fejtésök a' Felsőbb Mathesisbe tartozik. — A' Másod rangú Feladatok ismét kétfélék, u. m. vagy Tiszták (Pura), mellyekben az esmeretlen mindég Másod rangon jön elő, p. o. $x^2 + 2ax^2 = a + b$. — Vagy Különranguak (affecta), mellyekben az esmeretlen mind a' második, mind az első rangon előfordúl, p. o. $x^2 + 2ax = b$. Végre a' Feladatok minden eddig előszámlált Nemei vagy Egyesmeretlenüek, vagy több Esmeretlenüek. — Mind ezekről látni fogunk külön külön.

§. 4. A' Feladatok megfejtésében két fő munka van, u. m. 1. Egyenlet készítés (Constructio aequationis) 2. Kifejtése az Esmeretlennek (resolutio).

1. A' mi az Egyenlet készitést illeti: arra ugyan kimeritő Szabályokat adni alig lehet, 's leginkább gyakorlás által tanulhatni meg: szükséges mind az által e' következőket megtartani:

a. A' Feladatot Historiai ruhájából ki kell vetkeztetni, 's mint tiszta Mennyiséget, úgy kell nézni, p. o. azt kérdik egy leánytól: hány esztendős? F. én annyi a' mennyi, — az anyám két annyi, — az Atyám 5 Esztendővel idősebb az Anyámnál; — a' hármonk ideje együtt 100 Esztendő: — ide megy ki tisztán: mellyik az a' szám s' mellyhez ha hozzá adjuk annak kettőzetét, — 's ismét kettőzetét, még ahhoz 5-öt; lesz a' summa = 100.

b. A' kérdést jól meg kell érteni hogy tisztán lássa az ember, mi van kiadva mint esmeretes; és mi van kérdésben mint esmeretlen Mennyiség.

c. Minden előforduló mennyiségeket el kell nevezni, és oldalról feljegyezni; — az esmereteseket a, b, c, 's a' t. az esmeretleneket x, y, z, 's a' t.

d. Ezen elnevezésben fő szabály az, hogy a' külömböző betük számát, kivált pedig az esmeretlenekre nézve, nem kell szükség nélkül szaporitani. Ha tehát azok egymástól függők, az az ollyanok, hogy egyikből a' másikat könnyű kitalálni: akkor azokat csak egy betüvel kell kifejezni: Ez pedig megeshetik ezen esetekben legtöbbször:

α. Ha egyik esmeretlen a' másiknak kettőzete, hármazata, négyzete 's a' t.; akkor ha az egyik = x, a' másik lesz = 2 x, 3 x 's a' t.

β. Ha egyik a' másiknak része, p. o fele, harmada, két harmada, három negyede 's a' t. részlettel kell kifejezni, p. o.

$$x, \frac{x}{2}, \frac{2x}{3}, \frac{3x}{4} \text{ 's a' t.}$$

γ Ha két esmeretlenek summáját tudjuk: akkor az egyik lesz = x a' másik = s — x.

δ. Ha pedig a' két esmeretlen közti külömbséget tudjuk: akkor ha ezt a' kissebbhez adom, kijön a' nagyobbik; vagy a' nagyobbikból kiveszem, kijön a' kissebbik. Ha hát a' nagyobbik = x: lesz a' kissebbik = x — k. Ha pedig a' kissebbik = x, lesz a' nagyobbik = x + k.

ε. Ha két esmeretlennek szorozatját esmérjük: akkor az egyik = x a' másik lesz = $\frac{f}{x}$.

ζ. Ha a' kettőnek egymáshoz való szerét esmerem: arany regula segítségével egyiket a' másikból kifejezhetem, p. o. volnának egymáshoz ollyan szerben mint 2: 3 tehát az egyik lesz = x, a' másikat ki találom igy: $2 : 3 = x : \frac{3x}{2}$ lesz hát a' másik = $\frac{3x}{2}$.

Egyébbaránt sok elő nem számlálható esetek vannak, mellyekben egyik esmeretlent a' másikból ki lehet fejezni. És ez az Egyetlet késźítésre fő 's elmúlhatatlan dolog.

e. Minekutánna a' Feladatban előfordúló minden Mennyiségek ki vannak fejezve, 's elnevezve: ekkor azt kell figyelmetesen meg nézni, mik ott egyenlők egymással? vagy miket lehetne egyenlőkké tenni valami változtatással? — vagy micsoda Mennyiség az, a' mellyet két képpen ki lehetne fejezni; — 's ekkor az egyenlőket egyenlőség Jelével öszve kell kötni; 's készen van az Egyenlet.

f. Ha az esmeretlenek egymástól nem függenek; és igy ugyan azon egy betűvel, egymásból nem lehet őket kifejezni, hanem külön betük kívántatnak x, y, z 's a' t. akkor annyi Egyenletet szükség csinálni, a' hány külön esmeretlen van.

§. 5. A' mi 2szor a' **Kifejtést** illeti: ez nem egyéb mint az Esmeretlen értékének kikeresése. Azt pedig ugy találhatjuk meg, ha a' már feltett egyenletet, a' feljebb elő adott módokon addig változtatjuk, mig az Egyenlet' egyik részében egyedül maga az esmeretlen, tisztán, minden rang, öszvező, nevező 's a' t. nélkül + Jellel áljon, — a' másikban pedig csupa esmeretes Mennyiségek. — Itt már lássuk a' külömböző fajta Feladatok kifejtésök modját.

A' Határozott első rangú egy esmeretlenű Feladatok kifejtésök.

§. 6. Ezeket kell csinálni:

1. A' Részleteket el kell törleni, mindenik Nevezővel szorozván a' többi minden tagokat.

2. Az esmeretlen Tagokat mind az egyik részbe — az esmereteseket mind a' másikba kell által tenni változtatott Jellel, — arra vigyázván, hogy egymást ugy ne rontsák le, hogy utoljára — Jellel maradjon az esmeretlen.

3. Ha vannak egy fajta Tagok: azokat öszve kell adni, hogy külön ne áljanak.

4. Ha az esmeretlen szorozva volna esmeretessel; vagy öszvezője volna: azt el kell mellőle hagyni, — és azzal a' másik egész részt elosztani.

5. Utoljára 'a betük helyett azoknak számbeli jelentésöket kell tenni; és megvisgálni, ha valjon az esmeretlennek talált értéke megfelel e' a' Feladat feltételeinek.

Példák.

1ső. Feladat két Ember, kiknek egyenlő summa pénzök volt, öszve tesznek 100 forintot; egyik a' pénzének $\frac{1}{3}$, másik $\frac{1}{5}$ részét adja. Kérdés: mennyi pénzök volt; és mennyit adott egyik egyik?

Megfejtés. Mindenik egyenlő pénze $= x$, egyik ád $\frac{x}{3}$t, másik $\frac{x}{5}$; és ez a' két rész $= 100 = a$. Lesz hát az Egyenlet:

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{5} = a$$

$$x + \frac{3x}{5} = 3a, \text{ és } 5x + 3x = 15a, \text{ és } 8x = 15a,$$

$$\text{és } x = \frac{15\,a}{8},\ x = \frac{1500}{8} = 187\tfrac{1}{2},\ x = 187\tfrac{1}{2}$$

$$\text{Tehát: } x = 187,5. \text{ És } \frac{x}{3} = 62,5, \text{ és } \frac{x}{5} = 37,5.$$

$$\begin{array}{r} 62,5 \\ 37,5 \\ \hline 100,0 \end{array}$$

2dik. Feladat a' Gazda 25 napra napszámost fogadván, véle igy egyezék: Minden napra, mellyen dolgozol fizetek 6 garast; minden napról mellyen nem dolgozol, a' tartásodért te fizetsz 4 garast; — 's eltelvén az idő, fizetett a' Gazda 10 garast. Kérdés: hány nap dolgozott? hány nap hevert —

Megfejtés. $25 = a$ Dolog napok $= x$.

Heverő napok $= 25 - x$ vagy $a - x$

Fizetés a' dolgozó napokért $= 6\,x$.

— a' Heverő napokért $= 4\,a - 4\,x$.

Kérdés miben van itt egyenlőség? vagy hogy lehetne csinálni? — F. A' dolog napokért való fizetés $= 6\,x$. több 10 garassal, mint a' heverő napokért való vissza fizetés. Ha tehát a' 6 x-ből kiveszünk 10-t = b-t: mindjárt egyenlő lesz a' 4a — 4x-el. — Lesz hát illyen egyenlet:

$$6x - b = 4a - 4x$$
$$6x + 4x = 4a + b$$
$$10x = 4a + b$$
$$x = \frac{4a + b}{10} = \frac{110}{10}$$

Dolog nap	x = 11	fizet = 66
Heverő nap a — x = 14		fizet = 56
		kivéve = 10

Más megfejtés: Mivel a' dolog tévő, és heverő napokért eső fizetés közti külömbség = 10 = b: ezt hát kifejezem kétképpen, — 's egyenletbe teszem

$$6x - (4a - 4x) = b$$
vagy $$6x - 4a + 4x = b$$
$$6x + 4x = b + 4a$$
$$10x = b + 4a$$
$$x = \frac{b + 4a}{10}$$
$$x = \frac{110}{10}$$
$$x = 11$$'s a' t.

1. Jegyzék. Midőn valamelly Feladatban summa, és annak részei forognak fenn: vagy öszveveszem a' részeket, 's azok egyenlők lesznek a' Summával; vagy a' Summából ki veszem a' részeket mind, 's lesz = o. p. o. — Hány Esztendős vagy? annyi a' mennyi — az anyám két annyi; — az Atyam 5 Esztendővel öregebb, az Ányámnál, mindnyájunk ideje = 100. Itt a' keresett idő x — az annyáé 2 x, az Atyáé 2 x + 5; 's ezen részek = 100 = a.

$$x + 2x + 2x + 5 = a$$

vagy ha az a-ból ezeket kivesszük

$$a - x - 2x - 2x - 5 = o$$
$$a - 5 = x + 2x + 2x$$
$$95 = 5x$$
$$x = \frac{95}{5} = 19.$$

2. Jegyzék. Ha pedig két mennyiség közti külömbség van kiadva: azt vagy kivesszük a' nagyobbikból, 's ez lesz = kisebbik; — vagy hozzá adjuk a' kisebbikhez 's lesz = nagyobbik; —

vagy pedig a' nagyobbikból ki veszem a' kisebbiket 's lesz = különbség. (Lásd a' második Feladatot).

3dik Feladat.

Libussa kisassony 3 kérőit illyen próbára tette: találjátok ki hány szem szilva van a' kosaramban? Ha egyikőtöknek adnám felét, és még egyet; — másikotoknak a' maradék felét és még egyet; harmadikotoknak a' maradék felét, és még hármat: magamnak egy se maradna.

Megfejtés. Ebben a' részeknek, és maradékoknak kifejtésére kell nagyon vigyázni.

A' szilvák száma $= x$

Első része $= \frac{x}{2} + 1 = \frac{x+2}{2}$

1ső maradék $= x - \frac{x-2}{2} = \frac{2x-x-2}{2} = \frac{x-2}{2}$

Második része $= \frac{x-2}{4} + 1 = \frac{x-2+4}{4} = \frac{x+2}{4}$

2dik maradék $= \frac{x-2}{2} - \frac{x-2}{4} = \frac{2x-4-x-2}{4} = \frac{x-6}{4}$

Harmadik része $= \frac{x-6}{8} + 3 = \frac{x-6+24}{8} = \frac{x+18}{8}$

És ezen részek öszve véve egyenlők az x-el lesz hát az Egyenlet:

$$\frac{x+2}{2} + \frac{x+2}{4} + \frac{x+18}{8} = x$$

$$x+2 + \frac{2x+4}{4} + \frac{2x+36}{8} = 2x$$

$$4x+8+2x+4+\frac{8x+144}{8} = 8x$$

$$32x+64+16x+32+8x+144 = 64x$$

$$64+32+144 = 64x-32x-16x-8x$$

$$240 = 8x$$

$$\frac{240}{8} = x = 30$$

Próba. 1sőnek ád $= 15 + 1 = 16$

2iknak $= \frac{30 - 16}{2} + 1 = 8$

3iknak $= \frac{30 - 24}{2} + 3 = 6$

$30 =$ Summa

4dik Feladat. Egy haldokló atya illyen testamentomot tesz: a' legöregebbik fijam vegyen ki hagyományomból 1000 forintot és a' maradéknak $\frac{1}{6}$-t; — a' 2dik fijam vegyen a' maradékból 2000 forintot és a' maradéknak $\frac{1}{6}$-t; — a' 3dik fijam vegyen a' maradékból 3000 forintot és a' maradéknak $\frac{1}{6}$-t 's igy szedje a' többi is. Azomban azt jegyzette meg, hogy ha igy osztoznak, akkor egyik se csalja meg a' másikat. Kérdés: mennyi a' capitalis, és mellyik mit kap?

Megfejtés. Ki csinálom tehát kettőnek a' részét, 's mivel azok egyenlők, egyenletbe teszem

— az egész örökség $= x$, — $1000 = a$, $2000 = 2a$

— az elsőnek megy $= a + \frac{x - a}{6} = \frac{5a + x - a}{6} =$

$\frac{5a + x}{6}$ — maradék $= x - \frac{5a - x}{6}$ vagy

$\frac{6x - 5a - x}{6}$ vagy, $\frac{5x - 5a}{6}$; ismét kivéve $2a$-t

$= \frac{5x - 5a}{6} - 2a$ vagy $\frac{5x - 5a - 12a}{6} = \frac{5x - 17a}{6}$

A' másodiknak $= 2a + \frac{5x - 17a}{36}$ vagy $=$

$\frac{72a + 5x - 17a}{36} = \frac{55a + 5x}{36}$

1ső Egyenlet. $\frac{5a + x}{6} = \frac{55a + 5x}{36}$

2dik Egyenlet $\frac{30a + 6x}{36} = \frac{55a + 5x}{36}$

3dik Egyenlet. $30a + 6x = 55a + 5x$

$6x - 5x = 55a - 30a$

$x = 25a = 25{,}000$

Próba: 1ső kap $1000 + 4000 = 5000$

2. — $2000 + \frac{18000}{6} = 5000$

3. — $3000 + \frac{12000}{6} = 5000$

4. $4000 + \frac{6000}{6} = 5000$

5dik. 5000.

5dik Feladat. Egy edény egy szivárvány által, melly bele vizet vezet, megtellik 5 percz alatt; egy csap által pedig kiürül 7 percz alatt. Kérdés: Ha mind a' kettő nyitva van: mennyi idő alatt fog megtelni?

Megfejtés. Az edénybe férő viz mennyisége nincs meghatározva, lesz tehát ez = 1. — Ezt az 1-et még másként is kifejezhetem, t. i. az x idő alatt a' szivárványon bejövő, a' csapon pedig kimenő vizközti külömbséggel. Mert amazon több jön be, mint ezen kimegy, és x idő alatt, éppen annyival kell többnek be jönni, a' kimenőnél, a' mennyi fér az edénybe = 1. — Kérdés: Tehát mennyi jön be x idő alatt: ezt kitalálom igy: $5 : 1 = x : \frac{x}{5}$, jön hát $\frac{x}{5}$. — Továbbá kérdés: Mennyi megy ki x idő alatt: $7 : 1 = x : \frac{x}{7}$ kimegy $= \frac{x}{7}$. —

Egyenlet $\frac{x}{5} - \frac{x}{7} = 1$

$$x - \frac{5x}{7} = 5$$

$$7x - 5x = 35$$

$$2x = 35$$

$$x = \tfrac{35}{2} = 17 + \tfrac{1}{2}.$$

6dik Feladat. Bizonyos munkát egyik Ember elvégez 17, másik 13 nap alatt: hát ketten mennyi idő alatt?

M. F. A' munka = 1. — Ezt másként kifejezem, ha öszve adom azokat, a' miket ebből dolgozik az egyik és a' másik x idő alatt. — Az egyiké lesz $17 : 1 = x \frac{x}{17}$, másiké $13 : 1 = x : \frac{x}{13}$

Egyenlet. $\frac{x}{17} + \frac{x}{13} = 1$

$$x + \frac{17x}{13} = 17$$

$$13\,x + 17\,x = 221.$$

$$30\,x = 221$$

$$x = \frac{221}{30} = 7 + \frac{11}{30}$$

7dik Feladat. Két napszámos egyenlő napi bérért dolgozott. Egyik 32 napra kapott 4 for. és 6 zsák zabot; másik 56 napra kapott 8 f. 54 xr. és 9 zsák zabot. — Kérdés: mennyibe adtak egy zsák zabot. — 4 = a, — 8 f. 54 xr. = b.

M. F. Egy zsák Zabért eső pénz = x. kapott hát az egyik 6 x + a másik pedig = 9 x + b. De az első 32 napra a' másik 56 napra. — A' mit itt két képpen kifejezhetek: az egy egy napra eső bér, t. i. az elsőnek 32-ed, a' másiknak 56-od része.

$$\frac{6\,x + a}{32} = \frac{9x + b}{56}.$$

Egyenlet $336x + 56a = 288x + 32b$

$$336x - 288x = 32b - 56a$$

$$48x = 3648 \text{ krajczár.}$$

$$x = \frac{3648}{48}$$

$$x = 76 \text{ kr.} = 1 \text{ for. } 16 \text{ kr.}$$

Próba. Egyik kap — 4 for. + 6 × 76 kr. = 456, — 456 + 240 = 696 kr. 32 napra, tehát egy napra 21 + $\frac{3}{4}$ kr.

Másik kap: 9 × 76 = 684 + 534 = 1218. 56 napra, tehát egy napra = 21 + $\frac{3}{4}$

8dik Feladat. Egy Úr az Inassának Esztendőre igért 150 for. és egy ruhát; de 8 hónap mulva el-eresztvén adott neki 86 for. és a' ruhát. — Kérdés mennyibe adta a' ruhát?

M. F. Éppen úgy mint az előbbit. — Ruha ára = x. — 12. Hónapra 150 + x, 8 Hónapra = 86 + x. — Ki kell csinálni egy Hónapit mindenikből.

9dik Feladat. Hány Esztendős vagy? Ha 5el több volnék; akkor két annyi volnék mintha öttel kevesebb idejű volnék.

M. F. x + 5 két annyi mint x — 5

Egyenlet: $x + 5 = 2x - 10$

$x = 15$

10dik Feladat. Ha két annyi idős volnék mint vagyok ugy 100-on annyival volnék felyül, mint most alól vagyok.

M. F. 100 = a Élet idő = x a' két külömbség egyenlő

$a - x = 2x - a$

11dik Feladat. Öt vadász közzül mindenik öttel lőtt többet az előtte valónál; azomban az utolsó éppen három annyit lőtt, mint az első: Kérdés: Mellyik mennyit lőtt?

M. F. 1ső x, — 2dik x + 5, — 3dik x + 10, — 4dik x + 15. — 5dik x + 20 $x + 20 = 3x$

12dik. Feladat. Ketten egyforma pénzel indultak el útra; egyik elköltött 50 for., másik 130-at. És az elsőnek öt annyi pénze maradt mint a' másiknak.

Kérdés: Mennyivel indultak el?

13dik Feladat. Egy gyermektől kérdik hány Esztendős — most $\frac{1}{3}$ résznyi mint az Atyám, de 50 Esztendő mulva az atyám csak $\frac{1}{4}$ el lesz idősebb nálam.

M. F. Most a' fiu ideje = x az atyáé 3 x de 50 Esztendő mulva a' fiiú = x + 50. — attya 3 x + 50, és igy a' fiúéhoz még az attyáénak $\frac{1}{4}$ részét hozzá kell adni, hogy annyi legyen mint az atyáé.

$$x + 50 + \frac{3x + 50}{4} = 3x + 50$$

14dik Feladat. Egynehány koldusnak valaki alamisnát akar adni: előbb akart mindeniknek öt öt kr. de ekkor 3 kr. hija volt a' pénzének; — azután akart négy négy kr-t, ekkor megmaradt két krja — Kérdés: hány koldús volt, és hány krajczárja?

M. F. Koldúsok száma $= x$ — Az ő pénzét kétképpen lehet kifejezni: $5x - 3$ és $4x + 2$. — és igy $5x - 3 = 4x + 2$.

15dik Feladat. Egy Takátshoz visznek fonalat, hogy szőjön belőle 66 rőföt; — még úgy kíván hozzá hét fontot; Nohát szőjön csak 54 röföt: úgy viszsza ád 2 fontot. — Kérdés: Hány font volt a' Fonál?

M. F. Ebben is egy rőfhöz valót kell két képpen kifejezni t. i. 66 rőfhöz kell $x + 2$ és igy egy röfhöz $\frac{x+2}{66}$; ismét 24 rőfhöz kell $x - 2$, és így egy rőfhöz $\frac{x-2}{54} = \frac{x+2}{66}$.

16dik. Elindúl egy ember és minden nap megy 6 mértföldet; — másik 5 nappal indúl utánna és tesz napjában 8 mértföldet. Kérdés. Hány nap mulva éri utól?

M. F. x nap mulva, az a' mit két képpen ki lehet fejezni, azon mértföldek száma, mellyeket mindenik eltartozik végezni, még egymást utól érik. — Az első már 5 nap alatt ment $5 \times 6 = 30$-t, még x nap alatt $= 6x$, és igy $30 + 6x$, másiké $8x$, ezek egyenlők, mert úgy érheti el, és igy, —

$$30 + 6x = 8x$$
$$30 = 2x$$
$$x = 15 \text{ nap mulva.}$$

17dik. Egy Ember minden hónapban le tesz 10 forintot; a' másik két Esztendő mulva követi példáját de 15 for. tesz le hónaponként. — Mennyi idő mulva lesz ennek annyi pénze mint amannak?

$$24 \times 10 + 10x = 15x$$

18dik. Az óramutató van az ötön, — a' fertálymutató tizenkettőn: — Kérdés: Hány minútát halad addig az óramutató, mig amaz utól éri?

M. F. x minútát. — a' fertály mutató pedig $25 + x$. És $25 + x$ tizenkétszerte több, mint x, mert a' fertály mutató annyiszorta jár sebesebben; és igy $25 + x = 12x$.

19dik. Egy Ember utazik 's tesz napjában 6 mértfőldet; a' másik 5 nap múlva indúl utánna, és 15 nap múlva be kell érnie az elsőt. K. Hány mértföldet menjen napjában? — $30 + 90 = 15x$; — $x = \frac{120}{15} = 8$.

20dik. Pest Párishoz 300 mérf. Egyik ember indúl Párisból Pest felé, és megy napjában 8 mértföldet; másik két nap mulva indúl Pestrül Páris felé és tesz napjában 10 mérf. K. Hány nap mulva és hol érnek együvé?

$$16 + 8x + 10x = 300$$
$$18x = 300 - 16 = 248$$
$$x = \tfrac{284}{18} = 15 + \tfrac{7}{9} \text{ nap.}$$
$$\text{Páristól } 142 + \tfrac{2}{9} \text{ Pestől } 157 + \tfrac{7}{9} = 300$$

21dik. Egy Ember hónaponként 6 forintot tett le, — és a' barátja két Esztendő mulva kezdvén hónaponként tett le 9 forintot de az első elvesztett 56 forintot, a' másik 40-t. Kérdés: Mennyi idő mulva lesz egyenlő pénzök és hány forintjok?

M. F. $144 + 6x - 50 = 9x - 40.$

22dik. Két kotsis vállalt fel egy rakás föld elhordását A és B. *A* előre elhordott 20 kocsival, mig B hozzá se kezdett: azomban *A* 7 kocsival visz addig mig B. 5-el; — de B meg két kocsin annyit visz el mint *A* hármon. *K*. Hányszor kell vinni Bnek mig annyi földet elhord mint A.

M. F. B-nek kell vinni x-szer. — Hát *A* addig hányszor visz? $5 : 7 = x : \frac{7x}{5}$ és így $20 + \frac{7x}{5}$ ször. — Ugy de *B* két kocsin annyit visz mint *A*. hármon: tehát ha a' B viteleit kettővel, az A-jét hárommal szorozom: kijön mind a' kettőnek elhordott maszszája, mellyek egyenlők:

$$3x = 40 + \frac{14x}{5}$$
$$15x - 14x = 200$$
$$x = 200$$

B. visz 200-szor

$$A.\ 5 : 7 = 200 : \frac{1400}{5} = 280 + 20 = 300\text{szor}$$

úgy de $3 \times 200 = 600$ és $2 \times 300 = 600$.

23dik. A' Nyúl 60 ugrással eléb jár a' kutyánál, és 9-t ugrik, mig a' kutya 6-ot; de a' kutyának három ugrása annyit tesz mint a' nyúléból hét. — K. Hányat ugrik a' kutya még el fogja?

M. F. Éppen az, a' mi az előbbijé.

24dik. Egy kereskedő adós 1000 forintal, de a' mit 18 hónap mulva tartozna meg adni. Úgy de kérik hogy mindjárt fizesse ki. Jól van ugy mond, de a' lucrum cessans-t ki veszem belőle, mert én Esztendőnként 8 procentet szoktam nyerni. — K. Mennyit fog viszsza fizetni?

M. F. Tizet x-et. Hát a' lucrum cessans mennyi —

$$100 : 8 = x : \frac{8x}{100}$$ de ez csak Esztendőre: Hát 18 hónapra?

$$12 : 18 = \frac{8x}{100} : \frac{12x}{100}.$$ És igy $x + \frac{12x}{100} = 1000$

$$100x + 12x = 100{,}000$$

$$x = \frac{100{,}000}{112} = 892 + \tfrac{6}{7}$$

25 dik. A' Koldús el ment a' Jupiter templomába, 's kérte hogy pénzét tegye két annyivá; meg lett; 's ő hálàdatosságból 2 forintot ott hagyott. — A' maradékkal ment az Apolló templomába, — az is duplázta, 's ő két forintot ott hagyott. — Ekkor haza ment 's meg számlálván a' pénzét, volt = 1 for.

26dik. Egy haldokló férj terhessen maradt feleségének illyen testamentomot tett: Hagyok 9000 forintot. — Ha fiad lesz az kapjon három annyit mint te; — ha pedig leányod lesz, — te kapj két annyit mint az. — Azomban szült egy fiút és egy leányt. K. Hogy osztozzanak most?

27dik. Egy kereskedő minden Esztendőben $\frac{1}{3}$ részel öregbiti vagyonát; de Esztendőnként elkölt 1000 for. és a' harmadik Esztendő végén kétszerte gazdagabb mint volt először K. Mennyi volt neki először?

Jegyzék. Vannak ollyan Feladatok, mellyben a' két esmeretlenek summáját és küllömbségét kiadják. Az illyeneket minden Egyenlítés nélkül is megmondhatni: mert: **Ha a' fél summához fél küllömbséget adunk, ki jön a' nagyobbik; ha pedig fél summából fél küllömbséget kiveszünk: kijön a' kissebbik.**

Ugyan is:

1. A' nagyobbik legyen $= x$. Ekkor a' kissebbik $= x - k$, és ezek ketten teszik a' summát; tehát $x - k + x = s$ és $s = 2x - k$, és $s + k = 2x$ és $x = \frac{s+k}{2}$

2. A' kissebbik legyen $= x$ a' nagyobbik lesz $x + k$ és $x + x + k = 5$, vagy $2x + k = 5$, vagy $2x = 5 - k$

és $x = \dfrac{s - k}{2}$

p. o. $s = 70$ $\quad$ $N. = 35 + 27 = 62$
$k = 54$ $\quad$ $K. = 35 - 27 = 8.$

II. A Határozott első Rangú több esmeretlenül Feladatok kifejtésök.

§. 7. Már megmondatott, hogy a' hány esmeretlen van: annyi egyenletet kell csinálni. Ekkor azon kell igyekezni, hogy csak egy esmeretlenünk maradjon; a' többit mind kiircsuk. Ennek az egynek értékét aztán ki keressük; 's abból a' többijé is kijön. — Ez a' kiirtás pedig többféleképpen történhetik u. m.

1. Öszve-tétel által, úgy hogy egyik valamellyik esmeretlenek értéke két egyenletből kifejeztetik 's azok, mivel egyenlők, egyenlet jelével öszve köttetnek. p. o.

$$\begin{array}{l|l} 3x + 5y = a & x = \dfrac{a - 5y}{3} \\ 10x - 2y = b & x = \dfrac{b + 2y}{10} \end{array}$$

lesz, $\dfrac{a - 5y}{3} = \dfrac{b + 2y}{10}$.

's ekkor az y értéke kikerestetvén: abból majd az x-et is meg tudjuk mert $x = b + 2y$.

2. Helyette tétel által midőn egyik esmeretlennek értéke az egyik Egyenletből kifejeztetvén, — az a' másik Egyenletben annak helyébe tétetik.

$$\begin{array}{l|l} \text{p. o. } 3x - y = a & x = \dfrac{a + y}{3} \\ 6x - 3y = b & \end{array}$$

$$b\left(\frac{a + y}{3}\right) - 3y = 6 \text{ vagy } \frac{6a + 6y}{3} - 3y = b$$

3. Öszveadás által, ha két egyenletben valamellyik

esmeretlen, ugyan azon öszvezővel és ranggal, de ellenkező jellel van; úgy hogy az öszveadás által egymást kiirtják. p. o.

$$\begin{array}{l} 3x - 2y = a \\ 2x + 2y = b \\ \hline 5x \quad = a + b. \end{array}$$

4. Kivonás által, ha két Egyenletben valamellyik esmeretlen ugyan azon öszvezővel és ranggal, ugyan azon jellel áll, úgy hogy változtatott jelű öszveadás vagy is Kivonás által fogják egymást kiirtani, p. o.

$$\begin{array}{l} 3x - 2y = a \\ -4x \mp 2y = -b \\ \hline \end{array}$$

Jegyzék. Gyakran ha ezeknek öszvezői nem egyenlők: lehet szorozás vagy osztás által, valamellyik Egyenletet úgy változtatni, hogy azok is ugyan azok legyenek; csak minden Tagokat kell szorozni vagy osztani, p. o.

$$\begin{array}{l} 3x - 4y = a \\ \left(\begin{array}{l} 2x + 2y = b \\ 4x + 4y = 2b \end{array}\right) \text{kettővel szorozva lesz} \\ \hline 7x \quad = a + 2b \end{array}$$

$$6x + 9y = a - c \text{ elosztva 3-al. } 2x + 3y = \frac{a - c}{3}$$

$$3x + 6x = b + d \text{ elosztva 2-vel}$$

$$\begin{array}{l} \pm \frac{3x}{2} \pm 3y = \frac{-b \pm d}{2} \\ \hline 2x - \frac{3x}{2} = \frac{a - c}{3} - \frac{b - d}{2} \end{array}$$

Jegyzék. Ha kettőnél több esmeretlenek vagynak, azokat is mind egymás után igy lehet ki irtani.

Példák.

1ső Feladat. Ha 5 forintot nyerek tőled: úgy nekem annyi pénzem lesz mint neked; de ha te nyersz tőlem 5 forintot, neked két annyi lesz mint nekem.

$$\text{M. F.}\quad x + 5 = y - 5$$
$$y + 5 = 2x - 10$$
$$x = y - 10$$
$$x = \frac{y + 15}{2}$$
$$y - 10 = \frac{y + 15}{2}$$
$$2y - 20 = y + 15$$
$$y = 35 \mid x = 25.$$

2dik. Az Én juhom a' tiednek felével 3000, a' tied meg az enyimnek egy harmadával 3000.

Kérdés: Mennyi az enyim; — mennyi a' tied?

3dik. Kérdi a' Tanitvány a' Tanítótól, hogy 300 tanuló társai közt hányadik? — Ha ugymond az előtted valók számát négyszer veszed: annyi lesz mintha az utánnad valókét 6-al elosztod.

$$x + y = 300$$
$$4x = \frac{y}{6}$$

4dik. Ha a' városban több lakos lett volna 3000-el: ugy egy egy lakos kevesebb sarczot fizetett volna 10 forintal az ellenségnek; — ha pedig kevesebb lakos lett volna 1000-el: úgy egy egy többet fizetett volna 10 forintal.

Kérdés: Hány lakos volt, mit fizetett egy egy, — mennyi volt az egész sarcz?

M. F. Lakosok száma $= x$ $\quad a = 3000$
Egy egy fizetése $= y$ $\quad b = 1000$
Egész sarcz $= xy$.

Ha többen vannak 3000-el $= x + a$ akkor egy fizet $\frac{xy}{x+a}$

kevesebben 1000-el $= x - b$ — — $\frac{xy}{x-b}$

Egyelnet $\frac{xy}{x+a} = y - 10$

$$\frac{xy}{x-b} = y + 10$$

5dik. Ha kettő héjjunk lett volna: egynek egynek 1000 forintal több jutott volna; ha pedig még hárommal többen lettünk volna, úgy egy egy 1000 forintal kevesebbet kapott volna. Hányan voltunk hát, és mennyit kapott egy egy?

6dik. Három bombizó hányta a' bombit egy városra egész nap. A' két első együtt 26-al vetett többet mint a' harmadik; a' két utolsó 38-al többet mint az első; — az első és utolsó 24-el többet mint a' középső.

7dik. Egy valakinek kétféle bora van egyiknek akója 95 forintos, — a' másiké 64 forintos. Ezekből akar elegyíteni 50 akót olly szándékkal hogy annak akóját 80 forinton adhassa. — Mellyikből hány akó kell?

$$x + y = 50$$
$$95x + 64y = 80 \times 50$$

8dik. Ha a' 30 garasos bort 24 garason akarod mérni, mennyi viz kell hozzá, hogy se kárt ne valj, se ne csalj.

$$x + y = 1 \text{ akó}$$
$$30x + 0xy = 24.$$

III. Határozott másodrangú Tiszta Feladatok megfejtesök.

§. 8. Az egyenletet addig kell változtatni mig egyik részében x^2 tisztán, a' másik részében pedig csupa esmeretes mennyiségek lesznek. Ekkor mindenik részéből az Egyenletnek Gyökeret kell venni. p. o.

$$bx = \frac{c}{x}$$
$$bx^2 = c$$
$$x^2 = \frac{c}{b}$$
$$x = \pm\sqrt{\frac{c}{b}}$$

Jegyzet. A' Gyökér jele + lesz e' vagy —: előre bizonyosan nem tudhatni; hanem a' környülállások szokták megmutatni.

Példák.

1ső. Mellyik az a' szám, melynek ha felét harmadrészével szorozzák: lesz 294?

$$\text{M. F.}\quad \frac{x}{2} \times \frac{x}{3} = \frac{x^2}{6} = 294 = a$$

$$\frac{x^2}{6} = a$$

$$x^2 = 6a$$

$$x = \sqrt{6a} = 42.$$

2dik. Egy Atya így szóll a' fiaihoz: ha mindenikőtöknek 3 aranyat adnék, ugy minden pénzem oda adnám; — ha pedig egynek egynek annyit adnék, a' mennyi nekem van, mind öszve, ugy 300 aranyra lenne szükségem K. Hány fia, — hány aranya volt?

M. F. Fija $= x$ $\quad 3x = y$ $\quad x = \frac{y}{3}$

arany $= y$ $\quad xy = 300$ $\quad x = \frac{300}{y}$

$$\frac{y}{3} = \frac{300}{y}$$

$$y^2 = 900,\ y = \sqrt{900} = 30.$$

IV. Határozott Másodrangú, Elegyesen rangozók.

Feladatok megfejtésök.

§ 9. Az illyenekben leginkább az az eset jön elő, hogy egyik részében az Egyenletnek csonka négyleg rang van, mellyet ki kell pótolni. Ugyan is a' két tagu Gyökér Négyleg rangja áll három tagból p. o. $x + a$-nak Négyleg rangja $x^2 + 2ax + a^2$. — De az illyen Feladatokban rendesen a' Négyleg rang harmadik tagja t. i. a' második Gyökér négyleg rangja hibázik. Legelőször is tehát azt kell kipótolni, ugy hogy kikeressük, mi legyen a' második Gyökér tag; (az első Gyökértag kettőzetével elosztván a' második tagot). Ekkor ezen második Gyökértagot négyleg rangra emelem 's hozá adom az Egyenlet mindenik részéhez. — Ekkor mindenik részből gyökeret veszek; — 's az x-et magában hagyom,

p. o. $x^2 + \frac{2ax}{2x} = b$ | 2dik Gyökér a

kipótolva $x^2 + 2ax + a^2 = b + a^2$

Gyökeret fejtve $x + a = \sqrt{b + a^2}$

$x = \pm \sqrt{b + a^2} - a$

P é l d á k.

1ső Feladat. Két számnak külömbsége 6; szorozatja 91: mellyek azon számok?

M. F. Egyik x

másik $x + 6$

szorozva $x^2 + 6x$

Egyenlet. $x^2 + 6x = 91$ | Gyökér $= 3$

pótolva $x^2 + 6x + 9 = 91 + 9$

Gyökeret fejtve $x + 3 = \sqrt{91 + 9} = \sqrt{100} = 10$

$x = 10 - 3 = 7$

$x + 6 = 13.$

2dik. Mellyik az a' szám, a' mellyet ha tulajdon négylegével öszve adsz lesz $= 90$

M. F. $x^2 + x = 90$ | Gyökér $x + \frac{1}{2}$

$x^2 + x + \frac{1}{4} = 90 + \frac{1}{4}$

$x + \frac{1}{2} = \sqrt{90 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{361}{4}} = \frac{19}{2}$

$x = \frac{19}{2} - \frac{1}{2} = \frac{18}{2} = 9.$

3dik. Két Ember *A* és *B* vettek együtt 30 röf posztót; *A* egyegy röfért 4 annyit fizetett, a' hány rőföt vett *B*, és fizetett 500 fort. — Kérdés: Mellyik hány röföt vett, 's hány forinton?

M. F. *A* vett $= x.$

B — $= 30 - x$

A fizet mindnyájáért $4(30 - x)\,x = 120x - 4x^2$

$120x - 4x^2 = 500$; és $4x^2 - 120x = -500$

$x^2 - 30x = -125$ | Gyökér $x - 15$

$x^2 - 30x + 225 = -125 + 225$

$x - 15 = \sqrt{100} = 10$

$x = 10 + 15 = 25$

$30 - x = 5.$

4dik Egy haldokló atya 30,000 forintot olly feltétellel hagyott, hogy az özvegye kapja felét; a' másik felén osztozzanak gyermekei. — Kevés idő mulva meg holt a' gyermekekből kettő, — 's ekkor 625 forintal többet kapott egy egy, mint kapott volna előbb. — K. Hány gyermeke volt előbb

M F.

$30,000 = a$

$625 = b$

A' Fiak előbb x

utóbbb $x - 2$

részek előbb:

$$= \frac{a}{2} : x = \frac{a}{2x}$$

későbben

$$= \frac{a}{2} : x - 2 = \frac{a}{2x-4}$$

és ez 625-el több az elsőnél.

Egyenlet $\frac{a}{2x} + b = \frac{a}{2x} -, 4$

$$a + 2xb = \frac{2xa}{2x-4}$$

$$2xa - 4a + 4x^2b - 8xb = 2xa$$

$$2xa - 2xa + 4x^2b - 8xb = 4a$$

$$4x^2b - 8bx = 4a$$

$$x^2 - 2x = \frac{4a}{4b} \quad | \text{ Gy. } x - 1$$

$$x^2 - 2x + 1 = \frac{4a}{4b} + 1$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{4a}{4b} + 1} + 1 \quad \left| \frac{4a}{4b} = \frac{120,000}{2,500} \right| = \sqrt{48 + 1} = 7$$

Próba $\frac{15,000}{8} = 1,875$

$\frac{15,000}{6} = 2,500$

Külömbség $= 625.$

Jegyzék. Az ollyan Feladatokban, mellyekben két esmeretlen van, 's egyik nagyobb, másik kisebb, gyakran a' megfejtést könyithetni, hanem a' rendes módon nevezzük el egyiket x-nek, másikat y-nak; hanem a' kettő summáját nevezzük — 2x, és a' kettő közti külömbséget = 2y. Már a' fél summához fél külömbséget adván: kijön a' nagyobbik; és igy az lesz $x+y$; és a' fél summából fél külömbséget kivévén: kijön a' kisebbik $= x - y$. Igy nevezvén tehát el rendesen bánunk velek p. o.

5dik Feladat. Kérdezvén valaki a' Tanitótul: hány első Classisú, és hány Eminens tanitványa van? igy felelt; amaz több van mint emez; a' hét szám szorozatja $= 160$: — a' Négylegők külömbsége $= 156$.

M. F. $160 = a$. $156 = b$, a' Tanulók summája $=$ $2x$ külömbség $= 2y$. — 1ső Classisuak $= x + y$. Eminensek $= x - y$.

$$\text{Szorozat}\quad \begin{array}{l} x + y \\ x - y \\ \hline x^2 + xy \\ \quad - xy - y^2 \quad \big| = x^2 - y^2 = a \end{array}$$

$$\text{Négylegek külömbsége.}\quad \begin{array}{r} x^2 + 2xy + y^2 \\ -x^2 \mp 2xy \pm y^2 \\ \hline = \quad 4xy \quad = \end{array}$$

$$4xy = b$$

$$\begin{array}{r|l} x^2 - y^2 = a & x^2 = a + y^2 \\ 4xy = b & x = \frac{b}{4y} \text{ és } x^2 = \frac{b^2}{16y^2} \end{array}$$

$$a + y^2 = \frac{b^2}{16y^2}$$

$$16ay^2 + 16y^4 = b^2$$

$$ay^2 + y^4 = \frac{b^2}{16}$$

$$y^4 + ay^2 = \frac{b^2}{16} \quad \Big| \text{ Gyökér } y^2 + \frac{a}{2}$$

$$y^2 + ay^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{b^2}{16} + \frac{a^2}{4}$$

$$y^2 + \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{16}} = \sqrt{7921} = 89$$

$$y^2 = 89 - \frac{a}{2} = 80 = 9$$

$$y = 3, \text{ — és } x = 13$$

P r ó b a.

$2y = 6$	Szorozatjok	$= 160$	256
$2x = 26$	Négyszegrangjok különbsége		-100
$x+y = 16$		$=$	$156.$
$x-y\ \ 10$			

V. Határozatlan Feladatok Megfejtése.

§. 10. A' Határozatlan Feladatokban nem lehet annyi Egyenletet csinálni, a' hány az esmeretlen. Egyébaránt akár hány esmeretlenü legyen a' feladat: az eddig elő adott Szabályok szerént kell fejtegetni; mellyből a' lessz, hogy az utolsó Egyenletben nem egy, hanem két esmeretlen lessz, mellyek közzül az egyiket az esmeretesek sorába tévén, választunk neki valami értéket; de ollyat, melly a' környülállásokhoz alkalmatos legyen; — 's ha egyszerre jól nem jön, mást; — vagy harmadszor, negyedszer is próbálunk neki értéket adni. Sőt ha jól jön is; még is adunk néki többféle értéket; mert az illyen Feladatokat sokképpen lehet megfejteni. p. o.

Feladat. 1. Két szám közzül egyiknek kettőzete annyi mint a' másik □ rangja. Mellyik az a' két szám?

M. F. $2x = y^2$

$$x = \frac{y^2}{2}$$

Legyen az $y = 1$ lessz $x = \frac{1}{2}$

vagy $y = 2 - x = 2$

$y = 3 - x = \frac{9}{2}$

$y = 4 - x = 8$'s a't.

2. Feladat. Huszan voltak egy csapszékben; megittak 60 garas áru bort; a' férfiak fizettek hat hat garast; — az asszonyok négyet-négyet; a' gyermekek kettőt-kettőt. K. Hány Férfi, — hány asszony, — hány gyermek volt?

Megf. $x + y + z = 20$ | $y = 20 - y - z$

$6x + 4y + 2z = 60$ | $x = \dfrac{60 - 4y - 2z}{6}$

$$20 - y - z = \frac{60 - 4y - 2z}{6}$$

$$120 - 6y - 6z = 60 - 4y - 2z$$
$$60 - 4z = 2y$$
$$y = \frac{60 - 4z}{2}$$
$$y = 30 - 2z$$

Legyen $z = 12$ lessz $y = 6$
$x = 2$
— $z = 11$ — $y = 8$
$x = 1$
— $z = 13$ — $y = 4$
$x = 3$
— $z = 14$ — $y = 2$
$x = 4$. 's a' t.

HATODIK SZAKASZ.

A' Szerekről, Egyenszerekről és Foldogáló Szerekről (ratio, proportio et progressio).

§. 1. Ha két vagy több mennyiséget egymással egybe vetünk: látjuk, hogy azok egymáshoz bizonyos viszonyban állanak, a' mennyiben egyik nagyobb, a' másik kissebb. A' Mennyiségek ezen viszonyját nevezzük szernek (Ratio). — Kétképpen lehet pedig a' mennyiségeket egymással egybevetni: t. i. vagy azt nézzük bennök, hánnyal több vagy kevesebb egyik a' másiknál; és igy mi köztök a' különbség? — a' mit kivonás által lehet megtudni; — vagy azt: hányszorta nagyobb vagy kisebb egyik a' másiknál? — a' mit osztással lehet megtudni; — a' midőn a' szert mutatja a' hányados. — E' szerént a' szerek kétfélék ugymint:

1ször. Külömbségi Szer (Ratio arithmetica) mellyben a' különbséget nézzük, — 's annak jegye a' két szám közé tett vizerányos vonal p. o. 5 — 9 's igy mondjuk ki öt a' kilenczhez, — mellyben a' különbség = 4 és igy ollyan Szerben vagynak egymáshoz, hogy 9 az 5-nél 4-el nagyobb, 's viszont az 5, a' 9-nél 4-er kisebb.

2szor Hányados Szer (Ratio Geometrica) mellyben azt nézzük: hányszorta nagyobb vagy kisebb egyik a' másiknál; — és azt megtudjuk, ha a' kisebbikkel a' nagyobbikat elosztjuk, — a' midőn a' kijövő Hányados (Exponens) mutatja a' Szert. Ennek Jele a' két szám közzé tett két pont, p. o. $\underline{5 : 15}$ a' hányados $= 3$, melly azt mutatja, hogy az $\underline{5 \text{ a' } 15}$-höz ollyan szerben van, hogy $\underline{15}$ $\underline{3}$szorta több $\underline{5}$-nél, — $\underline{5}$ pedig $\underline{3}$szorta kevesebb $\underline{15}$-nél. Az illyen szer tehát nem egyéb, mint Osztás vagy Részlet, — és a' mi azokról igaz: mind az igaz ezen Szerről is.

§. 2. A' melly Szernek első tagja kissebb mint a' második: az neveztetik: Nevekedő Szernek (Ratio crescens) p. o. $\underline{5 - 7}$ és $\underline{2 : 6}$. — a' mellyben pedig az első tag nagyobb mint a' második, az neveztetik Fogyó Szernek (Ratio decrescens) p. o. $\underline{7 - 5}$ és $\underline{6 : 2}$.

Egyenlő Szereknek neveztetnek azok, a' mellyeknek különbségök vagy Hányadosok ugyan az, p. o.

$$\overset{2}{\underline{5 - 7}}, \text{ és } \overset{2}{\underline{9 - 11}}, \text{ igy } \overset{2}{\underline{4 : 8}} \text{ és } \overset{2}{\underline{5 : 10}}.$$

Ha két szerek közül mindenik vagy Nevekedő, vagy Fogyó: azok neveztetnek egymáshoz képpest: Egy menetelű Szereknek (Rationes directae) p. o. $\underline{8 : 10}$ és $\underline{5 - 7}$, igy $\underline{4 : 8}$, $\underline{6 : 12}$, vagy $\underline{7 - 5}$ és $\underline{10 - 8}$ igy $\underline{8 : 4}$ és $\underline{12 : 6}$.
Ha pedig a' szerek közzül egyik nevekedő, másik fogyó: azok neveztetnek Visszás Szereknek (Rationes inversae, vel indirectae) p. o. $\underline{5 - 7}$ és $\underline{10 - 8}$ igy $\underline{8 : 4}$ és $\underline{6 : 12}$.

§. 3. A' Különbségi nevekedő Szerben a' hátulsó tag származik az elsőből, hozzá adván a' különbséget. A' Fogyóban pedig az elsőből, kivévén belőle a' különbséget, p. o. $\underline{5 - 7 = 5 - 5 + 2}$ igy $\underline{7 - 5 = 7 - 7 - 2}$ innen ha az elsőt Nevezzük $\underline{a}$-nak a', különbséget $\underline{k}$-nak: e' lessz a' közönséges forma a' nevekedőre: $\underline{a - a + k}$ és a' fogyóra $\underline{a - a - k}$, vagy öszvetéve: $\underline{a - a \pm k}$.

Hasonlóul a' Hányados Nevekedő Szerben a' hátulsó tag áll az elsőből, szorozva a' Hányadossal, p. o.

$$4 : 8 = 4 : 4 \times 2; —$$

a' Fogyóban pedig áll az elsőből, elosztva a' Hányadossal, p. o. $8 : 4 = 8 : \frac{8}{2}$, vagy ha az első tag lesz $= a$, a' Hányados $= q$, lessz a' következő tag a' Nevekedőben $= aq$, a' Fogyóban $= \frac{a}{q}$ és igy közönséges forma a' nevekedőre: $a : aq$, a' Fogyóra: $a : \frac{a}{q}$.

§. 4. Öszvetett Szereknek neveztetnek (Rationes compositae) azok, mellyek több egyes szerekből tétetnek öszve. Ezen öszvetétel pedig a' külömbségi Szerekben úgy esik, ha az első tagok egymással, és az utolsók egymással öszveadatnak. — A' Hányados Szerekben pedig úgy esik, ha az elsők egymással, és az utolsók egymással szoroztatnak. Az öszvetett külömbségi szernek külömbsége éppen annyi, mint az egyes szerek külömbségeinek summája, p. o.

$$\begin{array}{l} 3 - 6 \\ 5 - 7 \end{array} = 8 - 13; \; -$$

A' Hányados öszvetett szernek pedig hányadosa, éppen annyi, mint az egyes szerek hányadosainak szorozatja, p. o.

$$\begin{array}{l} 2 : 6 \\ 4 : 8 \end{array} = 8 : 48$$

Ha két egyenlő Szerek tétetnek öszve, az onnan származott szer neveztetik kettőzött Szernek (Ratio duplicata) vagy a' hányados szerek körül □ Négyleg Szernek (Ratio quadratica) mert ennek külömbsége az egyesek közül, akármellyik külömbségének kettőzete, — vagy ennek hányadosa az egyesek közül akármellyik hányadosának □ rangja,

$$\text{p. o.}\quad \begin{array}{l} 5 \overset{2}{\underset{2}{-}} 7 \\ 8 - 10 \\ \hline \quad\;\; \overset{4}{} \\ 13 - 17. \\ \hline \end{array}$$

$$\text{igy}\quad \begin{array}{l} 2 \overset{2}{:} 6 \\ 3 : 9 \\ \hline 6 : 54. \end{array}$$

Ha pedig 3 egyenlő Szerek tétetnek öszve: onnan származik Hármazott, vagy ha a' szer hányados, koczkázott szer (Ratio triplicata, vel cubica).

§. 5. Akármelly szernek tagjait lehet változtatni a' nélkül, hogy a' szernek értéke megváltoznék igy:

1ször A' külömbségi szerben ha mind az elsőhöz, mind az utolsóhoz ugyan annyit adunk, vagy mindenikből ugyan annyit elveszünk, p. o. 5 —²7 hozzá adok 3-at lesz: = 8 —²10 elveszek 4-et lesz = 1 —²3.

2szor A' Hányados Szerben pedig ha mind az első, mind az utolsó tagot ugyan azzal szorozzuk, vagy elosztjuk, p. o., 4 :₂ 8 szorozom 2-vel lesz 8 : 16, vagy elosztom 2-vel = 2 : 4

§. 6. A' Hányados Szerekben ha egynehány egyenlő szernek első tagjait egymással és utolsó tagjait is egymással öszveadjuk, ezen öszveadásból származott szer minden egyes szerekkel egyenlő lesz, p. o.,

$$\begin{array}{c} 2 : 4 \\ 3 : 6 \\ 4 : 8 \\ \hline 9 : 18 : \end{array}$$

MÁSODIK CZIKKELY.

Az Egyenszerekről.

§. 7. Ha két egyenlő szerek az egyenlőség jelével öszveköttetnek, onnan származik az Egyenszer (Proportio); melly tehát nem egyéb, mint két szereknek egyenlőségök, 's igy mondjuk ki: a' mint van az egyik szernek első tagja a' maga utolsójához; — úgy van a' másik szernek első tagja is az utolsójához. — Ha két külömbségi egyenlő szerek köttetnek öszve: azokból származik külömbségi Egyenszer (Proportio arithmetica), p. o. 5 — 7 = 9 — 11. Közönséges formája a' külömbségi Egyenszernek ez:

$$a — a \pm k = ab — ab \pm k. —$$

Ha pedig hányadosok az egyenlő szerek: azokból lesz Hányados Egyenszer (Proportio Geometrica), p. o.

$$2 : 4 = 3 : 6.$$

Ennek közönséges formája ez: $a : aq = ab : abq$ vagy

$a : \frac{a}{q} = ab : \frac{ab}{q}$. — Ha az öszvetett szerek mind ketten vagy Nevekedők vagy Fogyók: akkor az Egyenszer neveztetik Egymenetelünek (directa), p. o. $2 : 4 = 6 : 12$ vagy $4 : 2 = 12 : 6$; ha pedig egyik nevekedő, a' másik Fogyó: akkor neveztetik Visszás Egyenszernek, p. o.

$$2 : 4 = 12 : 6$$

§. 8. Minden Egyenszer 4 tagból áll, mellyek közül kettő neveztetik Szélsőnek (Termini extremi); kettő pedig középsőnek (Termini medii). — A' melly Egyenszerben a' két középső tag ugyan azon mennyiség, az neveztetik Folytatott Egyenszernek (Proportio continua) p. o. $5 \div 7 = 7 \div 9$ igy $2 : 4 = 4 : 8$.

Az illyenben elég a' középsőt csak egyszer is leirni, a' midőn a' különbséginek eleibe teszszük ezt a' jelt ($\div$) p. o. $\div\ 5 - 7 - 9$; a' hányados folytatott Egyenszernek pedig ezt: ($\because$) p. o., $\because\ 2 : 4 : 8$. Azon középső tagot nevezik Középszeresnek (medius proportionalis), még pedig vagy különbségi, vagy hányados Középszeresnek.

§. 9. Az Egyenszerek általános törvényök ez:

1ször Minden különbségi Egyenszerben a' két szélsők summája annyi, mint a' két középsők summája, p. o. $5 - 7 = 9 - 11$, vagy:

$$a - a + k = b - ab + k.$$

$$a + k + b$$

$$a + b + k$$

Mert mikor a' két szélsőt öszveadjuk, akkor ezen 3 részt adjuk öszve: 1ször az első Szernek első tagját; — 2szor a' második szernek első tagját, és 3szor, a' különbséget. — Midőn pedig a' középsőket adjuk öszve, akkor is ugyan csak ezen 3 részt adjuk öszve, csakhogy a' külömbség most az első Szernek utolsó tagja mellett van 1. — Innen a' folytatott külömbségi Egyenszerben a' két szélsők summája annyi, mint a' középszeresnek kettőzete; mert mindegy, akár kétszer leirván azt öszveadjam, akár egyszer irván csak le, kétszer vegyem $\div\ 5 - \underbrace{7}_{14} - 9.$

2szor. Minden hányados Egyenszerben a' két szélső szorozatja éppen annyi, mint a' két középsőké, p. o.

$$2 : \underbrace{4 = 3}_{12} : 6 \ (12), \quad \text{vagy:} \quad a : \underbrace{a \times q = ab}_{a \times q \times b} : b \times q \ (a \times b \times q.)$$

Mert mikor a' két szélsőt szorozom: tulajdonképp 3 szorozóból csinálok egy szorozatot: u. m.

1ször Az első szernek első tagjából,
2szor A' második szernek első tagjából,
3szor A' Hányadosból. Mikor pedig a' két középsőket szorozom: akkor is ezen 3 szorozókból csinálok egy szorozatot; csak hogy a' hányados most az első szernek utolsó tagjában van. — Innen a' folytatott Hányados Egyenszerben a' két szélsők szorozatja annyi, mint a' középszeres □ rangja; mert mindegy, akár kétszer irjam le a' középsőt 's ugyan azt egymással szorozzam, — akár csak egyszer irván le, magát magával szorozzam: az az □ rangra emeljem, p. o.

$$\div\ 2 : \underbrace{4^2}_{(16)} : 8 \quad (16.)$$

§. 10. Ezekből lehet megérteni, miképpen lehet akármelly Egyenszert Egyenletté, és akármelly Egyenletté Egyenszerré változtatni.

1ször. Akármelly külömbségi Egyenszert Egyenletté teszünk úgy: hogy a' két szélsőt öszveadván, azoknak summája teszi az Egyenlet egyik részit, a' két közbülsőknek summája pedig a' másik részit, p. o. $5 - 7 = 6 - 8$ lesz az egyenlet $5 + 8 = 7 + 6 = 13 = 13$.

2szor Akármelly hányados Egyenszerből egyenlet lessz ugy, hogy a' két szélső szorozatja teszi az egyenlet egyik részét a' két középső szorozatja pedig a' másik részét, p. o. $2 : 4 = 3 : 6$ lesz $2 \times 6 = 4 \times 3$.

3szor Akármelly egyenletet külömbségi Egyenszerré lehet változtatni ugy, ha annak mind a' két részit ugy tekintve mint summákat, felosztjuk két két részekre, és ezen 4 részeket ugy rakjuk le: hogy ha valamelly részt az egyenszer első tagjának teszünk, már annak párját utolsóvá tegyük; a' másikból származott két részt pedig két középsővé. Mert igy a' két szélsők summája annyi lesz, mint a' két középsőké, p. o. $12 = 12$ felosztván mindeniket két részre lesz:

$$= 5 + 7 = 4 + 8$$

már igy lesz az Egyenszer: $4 - 5 = 7 - 8$

4. Akármelly Egyenletet Hányados Egyenszerré lehet változtatni, ha annak mind két részét ugy nézvén, mint szorozatokat, két két szorozókra felosztjuk, és ezen 4 szorozókat az elébbi renddel rakjuk le, p. o. $12 = 12$ szorozókra fejtve $3 \times 4 = 2 \times 6$ lesz az egyenszer: $3 : 6 = 2 : 4$ Hasonlóul $x = ab$ szorozókra fejtve $1 \times x = a \times ab$ lesz az Egyenszer: $1 : a = b : x$. Hasonlóúl $nd - d = ag - bg$ szorozókra fejtve $d \times n - 1 = g \times a - b$ lesz az Egyenszer: $d : g = a - b : n - 1$.

Az Egyenlő Szerek Formáinak változásáról, a' nélkül, hogy a' szeresség megváltoznék.

§. 11. Az egyenlő Szerek formáját sokképpen lehet változtatni; de valamig a' szélsők summája vagy Factuma a' középsők summájával vagy Factumával egyenlőnek marad: mind addig az egyenszer helyes, p. o. ezen Egyenszert: $2 : 4 = 3 : 6$ változtathatom illyen módokon:

1ször A' szélsőket megcserélve: $6 : 4 = 3 : 2$

(Transpositio)

2szor. A' középsőket megcserélve: $2 : 3 = 4 : b$

(Alternatio)

3. A' két szélsőt közepsőkké, a' közepsőket szélsőkké tévén: $4 : 2 = 6 : 3$ (Inversio).

4. A' két egész szernek helyét megcserélvén:

$3 : 6 = 2 : 4$. (Conversio)

5. Mind a' két szernek tagját öszveadván, és ezen summát mindeniknek vagy első vagy utólsó tagjával szerbe tevén, p. o. $2 + 4 : 2 = 3 + 6 : 3$

vagy $2 + 4 : 4 = 3 + 6 : 3$

(Sylepsis seu additio).

6. Mindenik szerben a' két tagnak külömbségét vagy az első vagy az utólsó tagjával szerbe tévén, p. o.

$4 - 2 : 2 = 6 - 3 : 3$

vagy $4 - 2 : 4 = 6 - 3 : 6$

(Dialepsis seu subtractio).

7. Szorozás által, ha vagy mind a' két tagot, vagy csak egyet mindenikből, még pedig vagy az elsőt, vagy az utolsót ugyan azon mennyiséggel szorozom, p. o. a' felvett szer, szorozzuk kettővel, lessz $= 4 : 8 = 6 : 12$

vagy $4 : 4 = 6 : 6$

vagy $2 : 8 = 3 : 12$

8. Osztás által éppen illyen módon lehet.

9. Mind a' 4. tagoknak ugyan azon rangra valo emelése által, vagy mindenikből ugyan azon gyökérfejtés által.

Az egyenszerbeli esmeretlen tag kikereséséről.

§. 12. Ha az Egyenszerben valami esmeretlen van, azt nevezzük x-nek, és letévén a' maga helyére, az Egyenszerből csinálunk Egyenletet, t. i. a' külömbségi Egyenszerben öszveadván, — a' Hányadosba pedig szorozván egymással a' szélsőket és középsőket; ekkor az x értékét kikeressük az Egyenletek törvénye szerént, p. o. $5 - 7 = x - 10$, vagy hátul ejtve az Egyenletek törvénye szerént, p. o.

$$5 - 7 = x - 10,$$

vagy hátul ejtve az x-et, $7 - 5 = 10 - x$

lesz az Egyenlet $5 + 10 = 7 + x$

és $x = 5 + 10 - 7$ vagy $x = 8$ igy $2 : 4 = x : 6$

lesz 2×16, vagy $32 = 4x$ és $x = \frac{32}{4} = 8$

$a : ab = x : c$ lesz $ac = ab\,x$ és $x = \frac{ac}{ab}$

A' Folytatott különbségi Egyenszerben a' középszert úgy találjuk ki, ha a' két szélsőt öszveadjuk, és az egyenlő a' 2x-el, és igy az x annyi mint a' két kiadott szám summájának fele, p. o.

$\div\ 2 - x - 8$ lesz $2 + 8 = 2x$ és

$$x = \frac{2 + 8}{2},\ \frac{10}{2} = 5.$$

A' hányados folytatott egyenszerben mivel a' két szélső szorozatja annyi, mint a' középszeres □ raugja: tehát a' két szélsőt, vagy is a' két kiadott számot egymással szorozzuk; és ezen szorozat lesz $= x^2$, és ha ezen szorozatból □ gyökeret fejtünk: a' lesz a' középszeres, p. o.

$\div\ 2 : x : 16, - 16 = x^2, - x = \sqrt{16} = 4. -$

A' Szeres Intézetről (regula aurea).

§. 13. A' szeres intézet ollyan számvetési munka, mellyben a' hányados Egyenszernek kiadott egynehány tagjából valamelly esmeretlent, mint szeres tagot keresünk. A' szeres intézet vagy Egyszerü, vagy Öszvetett. — Egyszerü (simplex) az, mellyben három taghoz keresünk negyediket, és ebben csak egy szert csinálunk. Öszvetett (composita) pedig az, mellyben öt taghoz hatodikat, vagy 7-hez 8-adikat 's a' t. keresünk, és ekkor több Egyenszereket kell csinálnunk.

1. A' mi tehát az Egyszerü szeres Intézetet illeti: eb-

ben a' kiadott három tag közül kettő ugyan azon dolgot jelent, a' harmadik pedig a' keresendővel páros, 's jelent vele egy dolgot. Már megtévén a' keresendőt x-nek: úgy csinálunk Egyenszert, hogy az utolsó szernek utolsó tagja lesz = x; ugyan annak első tagja pedig az a' szám, melly az x-el egy dolgot jelent. Továbbá a' feltételekből megvisgáljuk, ha valljon az x az ő párjánál nagyobb lesz e' vagy kisebb? — vagy is ha valljon ezen utolsó Szer nevekedő e vagy fogyó? Ekkor a' másik két mennyiségekből úgy formálunk Szert, hogy a' millyen az utolsó Szer, ollyan legyen az első is. Ekkor, mivel a' középsők szorozatja annyi, mint a' szélsőké: tehát a' középsőket szorozzuk, 's a' szorozatot az egyik szélsővel, t. i. az első kiadottal elosztjuk, és kijön a' másik szélső, az x.

2szor A' mi az öszvetett szeres Intézetet illeti: ebben több tagok vannak kiadva 5, 7, 9, 's a' t. mellyek közül egy magános, 's kettenként párosak a' többiek: és a' hány pár van, annyi Egyenszer lesz belőlök; melly Egyenszereknek mindnyájoknak utolsó szerök ugyan az, t. i. az x, a' maga párjával. Feltévén tehát ezen utolsó szert: a' kiadott tagok közül felveszünk mindjárt egy párt, és a' többi párokra nem tekintvén megnézzük, ha ezen felvett párokhoz képpest az utolsó növő e? vagy fogyó, és a'hoz képpest teszük ezeket is le vagy növő vagy fogyó Szerbe.

Azután Felveszünk másik párt, 's megnézzük, hogy azokhoz képpest millyen az utolsó szer, 's ezekből is ollyant csinálunk. Igy bánunk a' többi párokkal is. — Ekkép elkészitvén a' többi szereket is: ezekből öszvetett szert csinálunk, t. i. az elsőket egymással, utolsókat is egymással szorozván, 's ezen öszvetett szert a' közös szerrel Egyenszerbe tesszük 's a' szokott mód szerént a' középsők szorozatját az elsőkkel elosztván kijön az x.

Jegyzék. Ha a' Feladatban különfajta, de egyrcvehető mennyiségek vannak, p. o. forint, krajczár; — font, lat, 's a' t. legelőször is azokat kell a' legkisebb taggá változtatni.

Feladat. 3 ember, két nap alatt, napjában hét órát dolgozván, öszverak 84 öl fát: hát 5 ember, három nap alatt, napjában 4 órát dolgozván, mennyit rak öszve?

$$\begin{array}{l}
3 : 5 = 84 : x \\
2 : 3 = 84 : x \\
7 : 4 = 84 : x \\
\hline
42 : 60 = 84 : x
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 21 : 30 = \\ 7 : 10 = \end{array}\right\} 84 : x$$

$$7 : 10 = 84 : x$$

$$\frac{840}{7x}$$

$$\begin{array}{r|l|l}
7 & 840 & 120 \\
 & 7 & \\
\cline{2-2}
 & 14 & \\
 & 14 & \\
\cline{2-3}
 & \;\;0 &
\end{array}$$

$$x = 120$$

§ 14. A' Szeres Intézetnek vannak több alkalmaztatásai; p. o. illyen a' **Társaságos Intézet**, melly által kinek kinek az őtet illető nyereséget, vagy kárt szeresen szokták elosztani. Ez vagy ollyan, hogy minden tagok egy időre tették be summájokat; vagy ollyan, hogy külömböző időre tették. Az első esetben ezt kell csinálni: öszveadjuk egy summába az öszvetett pénzeket, és ezt mondjuk: a' mint van az egész summa kinek kinek beadott pénzéhez: úgy van a' nyereség vagy veszteség, az abból kire kire eső részhez, p. o. Három ember tett össze pénzt kereskedésre.

A tett = 150-et

B tett = 400-at

C tett = 650-et; nyertek pedig 3000 forintot: kinek mennyi esik egy részre?

$$\begin{array}{l}
1200 : 3000 = 150 : x. \\
1200 : 3000 = 400 : x \\
1200 : 3000 = 650 : x.
\end{array}$$

Ha pedig külömböző időre adták bé pénzőket: akkor kinek kinek beadott pénzét a' hónapok számával szorozzuk, a' mi csak annyit tesz, mintha ugy tekintenénk, hogy egy hónapra adott volna be annyiszor többet, a' hány hónapra adott. Egyébaránt csak az elébbi módon kell csinálni, p. o.

Három kereskedő öszveád bizonyos summát illy móddal:

A tett $=$ 150-et 3 hónapra $=$ 450
B tett $=$ 400-at 2 hónapra $=$ 800
C tett $=$ 650-et 5 hónapra $= \frac{3250}{4500}$
és nyernek 3000 forintot: mellyiknek mennyi esik?

$$4500 : 3000 = 450 : x$$
$$4500 : 3000 = 800 : x$$
$$4500 : 3000 = 3250 : x$$

Jegyzék. Vagynak még a' számvetésnek némelly fajtái, p. o. az Elegyítés (Regula Obligationis) a' Mesés (Regula falsi vel coeci) az Egyenetlen osztás 's a' t., mellyeket szeres Intézeten is szoktunk megfejteni; de sokkal könnyebb ezeket az egyenletek szabályi szerént fejteni meg.

HARMADIK CZIKKELY.

A' Folydogáló Szerekről.

§. 15. A' Folydogáló Szer nem egyéb, mint a' folytatott Szernek további folytatása, és igy valamint a' folytatott Szer vagy külömbségi vagy Hányados, éppen igy a' folydogáló Szer is külömbségi és Hányados; azonba vagy Nőddögélő vagy Fogydogáló. egyébaránt Fogydogálót könnyen lehet valtoztatni Nőddögélővé.

A' külömbségi Folydogáló Szerről.

§. 16. A' Folydogáló külömbségi Szer nem egyéb, mint a' külömbségi folytatott Szernek ugyan azon külömbséggel további folytatása, még pedig vagy Nőddögélő vagy Fogydogáló. Ezen Folydogáló Szerben akár hányadik tag származik az elsőből, hozzá adván annyi külömbséget, a' hányadik tag egy hijján, mert ez a' közönséges forma:

$$a : \overset{2.}{a+d} - \overset{3.}{a+2d} - \overset{4.}{a+3d}$$

és igy a' 25dik tag lenne: $\underline{a + 24d}$, vagy a' tagok számát $\underline{n}$-nek nevezvén, akár hányadik tagot igy lehetne kifejezni, $a + d \times \overline{n-1}$ vagy $a + dn - d$, és igy az utolsó tagot $\underline{u}$-nak nevezvén lesz $\underline{u = a + dn - d}$. Ezen egyenletből a' benne előforduló 4 mennyiségekre külön külön lehet egyenletet csinálni igy:

$$1,\ u = a + dn - d$$
$$2,\ a, = u - nd + d$$
$$3,\ d, = \frac{u - a}{n - 1}$$
$$4,\ n = \frac{u - a}{d} + 1$$

§. 17. A' külömbségi folydogáló Szereknek fő törvényök ez: a' két szélsők summája éppen annyi, mint párjával két két közbe esőknek, mellyek a' szélsőktől egyenlő távolságra vannak, vagy a' magános középső kettőzete, p. o.:

$$a - a + d - a + 2d - a + 3d$$
$$\boxed{a + d + a + 2d}$$
$$\boxed{a + a + 3d}$$

Igy: $2 - 5 - 8 - 11 - 14 - 17$

$$\boxed{19}\quad \boxed{19}\quad \boxed{19}$$

Innen látni való, hogy a' két szélső summája az egész folydogáló Szerben annyiszor van meg, mint a' hány pár tag van. És igy az egész folydogáló Szer summája kijön, ha a' két szélsők summáját a' tagok számának felivel szorozzuk. És igy $S = a + u \times \frac{n}{2}$ $S = \frac{an + un}{2}$ Ezen egyenletből a' benne előfordúló minden mennyiségekre ismét lehet Egyenleteket csinálni igy:

$$1,\ S = \frac{an + un}{2} \qquad 2,\ a = \frac{2S}{n} - u$$

$$4,\ n = \frac{2S}{a+u} \qquad 3,\ u = \frac{2S}{n} - a$$

A' Hányados Folydógáló Szerről.

A' Hányados Foldogáló Szer nem egyéb, mint a' hányados folytatott Egyenszernek további folytatása. Ez is vagy nőddögélő vagy fogydogáló, de a' fogydogálót nőddögélővé lehet változtatni, ha az utolsó tagot elsőnek nézzük. Az illyen folydogáló Szerben akár hányadik tag származik az elsőből, szorozván azt a' hányadosnak annyidik tagjával egy hijján, a' hányadik tagot akarjuk csinálni; mert ez a' közönséges forma: $a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4 : aq^5$; mivel mindenik tagot q-val kell szorozni, hogy a' következő tag származzék. És igy, p. o. 25-ik tag lesz aq^{24}; vagy ha a' tagok számát nevezzük n-nek, akár hányadik tag, p. o. az utolsó tag igy lesz: aq^{n-1}, és igy az utolsó tagnak ez a' formulája: aq^{n-1}.

A' Hányados folydogáló Szerben a' két szélsők szorozatja annyi, mint azon közbülsőknek szorozatja, mellyek a' szélsőktől egyenlő távolságra esnek: vagy mint a' magános közbülsőnek □ rangja, p. o.

$$2 : 4 : 8 : 16 : 32$$

$$(64) \qquad 64 \qquad 64$$

de itt ezen igazságnak a' folydogáló Szer kitalálására semmi hasznát sem vesszük. Hanem erre nézve másból kell okoskodnunk.

§ 19. Ha felveszünk akármelly hoszú folydogáló Szert; abban az első taghoz az a-hoz képpest a' többi tagok mind következők; az utolsóhoz pedig az u-hoz képpest az előtte valók mind Megelőzők. Már nevezzük az egész folydogáló Szer minden tagjainak summáját $= S$, innen a' megelőző tagok summája lesz, ha az S-ből kiveszem az u-t $= S - u$. — A' következő tagok summája pedig $= S - a$. Már az egyenlő Hányados Egyenszerek törvénye ez, — mint feljebb láttuk, hogy a' megelőző tagok summája úgy van a' következő tagok summájához, mint akármellyik megelőző tag a' maga következőjéhez, és igy $S - u : S - a = a : aq$. Ezen Egyenszerből csináljunk Egyenletet; lesz $Saq - uaq = Sa - a^2$. Ezt elosztván a-val lesz $Sq - uq = S - a$

Ezen Egyenletből, minden benne előforduló tagok értékét meghatározni lehet igy:

1ször az S-re nézve
$$Sq - uq = S - a$$
$$Sq - S = uq - a$$
$$S.(q - 1) = uq - a$$
$$S = \frac{uq - a}{q - 1}$$

2szor Az A-ra nézve:
$$Sq - uq = S - a$$
$$Sq - uq - S = -a$$
$$-Sq + uq + S = a$$
$$a = S + uq - Sq.$$

3szor A' Q-ra nézve
$$Sq - uq = S - a$$
$$q.(s - u) = S - a$$
$$q = \frac{S - a}{S - u}$$

4szer az U-ra nézve,
$$Sq - uq = S - a$$
$$Sq - S + a = uq$$
$$-uq = S - a - Sq$$
$$uq = Sq + a - S$$
$$u = \frac{Sq + a - S}{q}$$

5ször Az $\underline{S}$ kifejezésében az u-t kihagyhatjuk, ha a' helyett annak értékét vesszük, t. i. $\underline{aq^{n-1}}$, és igy e' helyett

$$S = \frac{uq - a}{q - 1}, \text{ lesz } S = \frac{aq^{n-1} \times q - a}{q - 1}.$$

Példa. Egy Ember 6 Lovat ád el olly móddal, hogy az elsőért adjanak 2 forintot, a' másodikért 3 annyit, és igy a' többiekért, mindég háromszorta többet. **Kérdés?** hány forintot adnak érte, mindöszve, 's hányat adnak az utolsóért?

$$n = 6 \qquad S = \frac{aq^{n-1} \times q - a}{q - 1}$$
$$a = 2$$
$$q = 3$$
$$S = 728 \qquad S = 2 \times 3^5 \times 3 - 2$$
$$U = 486$$

$$3^5 = 243$$
$$\underline{2}$$
$$486$$
$$\underline{3}$$
$$1458$$
$$S = \frac{1458 - 2}{2}$$

S = 2 | 1456 | 728
14
— 5
4
16

az utolsót pedig igy találjuk: $u = 2 \times 3^5$
$u = 2 \times 243$
$\underline{2}$
$u = 486.$

HETEDIK SZAKASZ.

A' Logarithmusokról.

Ha az Ember valamelly mennyiséget rangos mennyiséggel fejezhetne ki: igen sokat könnyithetne magán a' számvetési munkákban. Ki lehet pedig akármelly mennyiséget rangos mennyiséggel fejezni ugy, hogy felvesz az Ember valamelly kis számot gyökér gyanánt, és azt ollyan rangra emeli, hogy azon rangra emelve, éppen annyit tegyen, mint a' kiadott szám, p. o. 2 5 6-ot rangos mennyiséggel, kifejezhetem, ha felveszem gyökérül a' kettőt, mert 2^8 2 5 6, vagy ha felveszem gyökérül a' 4-et, mert $4^4 = 256$. Vehetnék fel ollyan számot is, melly ennek nem kerek gyökere, p. o. az 5, mert az 5-t nem tudom ugyan ollyan kerek rangra emelni, hogy éppen 2 5 6-tot tégyen, hanem a' Rangjelébe Részlet is jönne; de azért az 5-töt is nézhetem ugy mint 2 5 6 bizonyos gyökerét. Miért volna pedig óhajtható, hogy akármelly szám helyett, vele egy értekü rangozott mennyiséget tehetnénk? Azért, mert a' rangozott mennyiségekkel sokkal könnyebb bánni, mint a' csupa számokkal. — Ugyan is tudjuk azt, hogy a' mit a' számok körül szorozás által cselekeszünk: azt a' Rangozott mennyiségek körül egyszerü öszveadás által véghez vihetjük: t. i. csak a' rangjeleket öszveadjuk, p. o. ha a^2-t szorozni kell, a^3-val: öszveadjuk a' Rangjeleket; lesz $= a^5$. A' mit a' csupa számok körül, osztás által vihetni végbe; azt a' rangozott mennyiségek körül, egyszerű kivonás által véghez vihetem, ugy hogy az osztó rangjelét, az osztandójéból kiveszem, p. o. ha az a^5-t osztani kell a^2-vel: a' 2őt kiveszem az 5-ből, 's lesz $= a^3$. A' csupa számok körül a' rangra emelés, sokszoros szorozás által eshetik meg: a' rangozott mennyiségek körül pedig megesik egyszerű szorozás által, — t. i. ha a' Rangjelt szorozom azzal a' számmal, a' hányadik rangra akarom emelni, p. o. a^3-t emelni kell 5-dik rangra, a' 3-mat szorozom 5-tel, és lesz $= a^{15}$. — A' csupa számok körül a' gyökérfejtés, mesterséges fejtegetés által történik: itt pedig egyszerű osztás által; ugy hogy a' Rangjelt elosztom azzal a' számmal, a' hányadik gyökerét akarom venni, p. o. ha a^{16}-ból kell venni 4-dik gyökeret, a' 16-tot elosztom 4-el: 's lesz $= a^4$. — Látni való hát, hogy kivált a' nagy számokra nézve, kivánatos volna, hogy akármelly csupa szám helyett, rangozott mennyiséget tehetnénk, az az tehetnénk valamelly gyökeret ollyan Rangra emelve, hogy az osztán a' kérdésben lévő sámmal egy értekű legyen. Gonkoskodtak is erről a' Mathematicusok, és felvévén közös gyökérnek, vagy Alapnak (Basis) a' 10 et, kidolgozták jó messzire, sok milliókig, hogy minden addig lévő számok a' 10-nek micsoda rangjával egy értékűek? — Már a' 10-nek azt a' Rangjelét, a' mellyre ha ő felemeltetik, akkor éppen annyit tesz, mint valamelly kérdésben lévő szám, nevezik azon szám L o g a r i t h m u s á n a k (λογος ἀριθμος). — Igy $10^2 = 100$, a' 100-nak Logarithmusa $= 2$, minthogy a' 10-et 2-dik rangra emelem, vagy ha a' 10-nek Rangjele $= 2$: ugy ő $= 100$; — $10^3 = 1000$; tehát ezernek Logarithmusa $= 3$.

§. 2. Vegyük fel tehát a' 10-nek egynehány Rangjait, és lássuk, mik felelnek meg azoknak a' csupa számokban:

10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6
1, 10, 100, 1000, 10,000, 100,000, 1'000,000,

10^7, 10^8, 10^9,
10,000,000, 100,000,000, 1,000,000,000. —

Ennek egyszerű megtekintéséből, ezeket vehetjük észre:
1ször Hogy az Egynek Logarithmusa = 0, mert akármelly mennyiséget emeljek én 0 rangra, az = 1.

2szor Hogy a' hány számjegyből áll valamelly szám, az annak megfelelő Logarithmus egygyel kevesebb, p. o. 100 áll 3 Jegyből, — Logarithmusa = 2.

3szor Azt vehetjük észre, hogy itt a' Logarithmusok sorából telhetik külömbségi szer, még pedig folydogáló, mellynek külömbsége = 1; — a' megfelelő számok sorából pedig, Hányados Folydogáló szer, mellynek hányadosa = 10.

Az már a' kérdés, hogy minekutánna az 1-nek, 10-nek, 100-nak 's a' t. Logarithmusát tudom: hogy csinálhatom ki, mik légyenek Logarithmusai azoknak a' Számoknak, mellyek az 1 és 10 közt, 100 és 1000 közt esnek? — Vegyük fel 1ször is az 1 és 100 közt esőket, u. m. 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, mind ezeknek mi a' Logarithmusok? Az 1 Logarithmusa = 0, a' 10zé pedig = 1. A' mellyek hát az 1-nél nagyobbak, a' 10-nél kissebbek; azoknak Logarithmusok 0-nál több, 1-nél kevesebb, és igy Részlet. A' Logarithmusokban az egészet hivják Characteristicának, a' Részletet pedig Mantissának. Minthogy már közönséges Részletekkel élni alkalmatlan volna: Tizedes Részletekkel élnek itt is a' Mathematicusok; még pedig felvesznek 7. Tizedes jegyeket, tovább nem mennek. Hogy kell hát az 1 és, 10 közt esőket kikeresni. — Vegyük fel 1ször is a' 9-ét, 's tegyük Tizedes részletü mennyiséggé, igy: egy = 1 és 0000000; 10 = 10, 0000000, 0 = 0, 0000000, 9 = 9, 0000000. — Már a' 9 van az 1. és 10 között, és igy a' 9 Logarithmusa az 0 és 1 közt van; és igy mind addig kell ezek közt középszereseket keresni, mig nem végre az Ember reá akad mind a' 9-re, mind az annak megfelelő Logarithmusra. Még pedig mivel láttuk, hogy a' Logarithmusok sorában, külömbségi, a' megfelelő számok sorában pedig folydogáló Hányados szer uralkodik: tehát magok közt a' Számok közt, t. i.

az 1, 0000000, és a' 10, 0000000, közt hányados középszerest kell keresni, t. i. a' kettőnek szorozatjából □ Gyökeret fejteni; — a' Logarithmusok közt pedig, tudniillik 0, 0000000, és 1, 0000000, közt kell keresni külömbségi középszerest, t. i. ezeket öszveadván, a' summát el kell osztani 2-vel. — Igy osztán hosszas munka után, minekutánna 26-szor keresünk középszerest, mind a' Számok közt, mind a' Logarithmuaok közt, utoljára rá akadunk, a' 9, 0000000 és annak Logarithmusára, melly is = 0, 9542425.

§. 3. A' Tiz első számok közzül tehát, ha a' 9dik 8-nak 7-nek Logarihmusait igy középszeresekkel kikeresi az Ember: akkor a' többi egyes számok Logarithmusait könnyen kitalálja, sőt a' Tizeseken feljűl is kevés lesz, a' mellynek Logarithmusát ollyan nagy munkával kellene kikeresni, mint a' 9-ét. Lássuk hát, hogy találjuk ki a' többieket?

9 Logarithmusa = 0,9542425.
8 Logarithmusa = 0,9030900.
7 Logarithmusa = 0,8450980.

Már a' 9 Logarithmnsából, kicsinálhatom a' hárométet, — mert a' 3 □ — Gyökere a' 9-nek. Ha hát a' 9-ből □ Gyökeret fejtek, kijön a' 3: vagy ha a' 9 Rangos kifejezéséből = 10^0, 9542425-ből □ Gyökeret veszek, kijön a' 3 Rangos kifejezése. A' Rangos Mennyiségből pedig, ugy fejtünk □ gyökeret, ha annak Rangjelét 2-vel elosztjuk; és igy ha a' 9 Logarithmusának felét veszem, kijön a' 3 Logarithmusa, melly lesz = 0, 4771213.

Továbbá a' 8-nak koczkagyökere a' 2. Ha tehát a' 8 rangos kifejezésének koczkagyökerét veszem: kijön a' 2 rangos kifejezése, vagy ha a' 8-nak Logarithmusát 3-al elosztom, kijön a' 2 Logarithmusa, = 0, 3010300.

Már a' 2-nek □ rangja a' 4, és igy ha a' 2 Logarithmusát 2-szer veszem, vagy kettővel szorozom, kijön a' 4 Logarithmusa = 0, 6020600.

Ha tudom a' 2-nek 's 3-nak Logarithmusát: tudhatom a' 6-ét is; mert 2 × 3 = 6, és igy ha a' 2 rangos kifejezését szorozom a' 3 Rangos kifejezésével, az az ha a' 2 Logarithmusát öszveadom a' 3-éval: kijön a' 6 Logarithmusa = 0, 7781512. —

Ha tudom a' 10-ét és a' 20-ét: tudom az 5-ét is t. i. a' 10-éből a' 2-őjét kiveszem, 's kijön az 5-té = 0,6989700.

A' melly módon keressük az egyes számokét: éppen igy kereshetik a' feljebb valókét is, tudvan, hogy az 1-től a' 10-ig Characteristica = 0, 10-től a' 99-ig = 1, — 100-tól a' 999-ig = 2 's a' t., mindég egygyel kevesebb, mint a' hány jegyből áll a' szám, p. o. 11 Logarithmusát ki kell keresni középszeres által:

a' 12-é, kijön a' 3-ból 's 4-ből
13-ét keresd
14-ét 2×7, add öszve
15 = 3×5 add öszve
16 = 4×4 vagy 4^2 add öszve
17-ét keresd
18é = 3×6 add öszve
19 ét keresd
20 = 2×10 add öszve
21 = 3×7 add öszve
22 = 2×11 add öszve
23-ét keresd
24 = 3×8 add öszve
15 = 5^2 add öszve
26 = 2×13 add öszve.

Ezen a' módon a' Logarithmusokat kikereste elsőben Briggs Henrich, Oxforti Matheseos Professor, a' kitől ezen 10 alapu Logarithmusokat Briggs Logarithmusainak nevezik. Ő kidolgozta 1-től, 20,000-ig és 90,000-től, 100,000-ig. Azután kidolgozta Hadrianus Ulack, Belga; legközönségesebbek a' Véga Táblái.

§. 4. Több hasznai a' Logarithmusoknak.

1-ször Ha szorozni kell két számot: a' Logarithmitica Tabellákból azokat, és az azoknak megfelelő Logarithmusokat kikeressük, 's öszveadjuk; a' summát a' Logarithmusok oszlopában felkeressük, és az annak megfelelő szám lesz a' két kiadott számnak szorozatja. És igy látni való, hogy ez által mind a' nagy számokkal való szorozás könnyittetik, mind a' számvetésbe csúszható hiba elkerülődik, p. o. szorozz 3 2 4-et 2 6-al

3 2 4 Logarithmusa, 2 , 5 1 0 5 4 5 0

+2 6 Logarithmusa, 1 , 4 1 4 9 7 3 3, ennek a' Logarithmusnak megfelel 8 4 2 4, és $324 \times 26 = 8424$.

2-szor. Ha osztani kell két számot, az osztó Logarithmusát kiveszem az osztandójéból, 's a' mi ott marad, a' lesz a' Hányados Logarithmusa, 's azt a' Táblában felkeresvén, 's az annak megfelelő szám lesz a' Hányados. —

3-szor. Ha valamelly számot Rangra kell emelni: kikeresem a' Táblából a' Logarithmusát, és szorozom annyival, a' hányadik Rangra emelem, a' Logarithmusok közt a' szorozatot kikeresem, melly szám annak megfelel: a' lesz a' kiadott számnak keresett Rangja.

4-szer. Ha valamelly számból gyökeret kell fejteni, a' Logarithmusát kikeresem: és elosztom annyival, a' hányadik gyökeret akarom venni; a' kijöttet kikeresem a' Logarithmusok közt, 's az annak megfelelő szám a' keresett gyökér, p. o. $\sqrt[6]{64}$, Logarithmusa 1 , 8 0 6 1 8 0 0, elosztva 6-al kijön 0 , 3 0 1 0 3 0 0, 's ezen Logarithmusnak megfelel

2: és $\sqrt[6]{64} = 2$. —

A' Logarithmusok több hasznairól, p. o. az Interesek Intereseinek kikeresésében, 's a' t. a' Tanitásokon lessz szó.

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{5} = a$$

$$x + \frac{3x}{5} = 3a$$

$$5x + 3x = 15a$$

$$8x = 15a$$

$$x = \frac{15a}{8} = 187,5$$

$$x = 187,5$$

$$\frac{x}{3} = 62,5$$

$$\frac{x}{5} = 37,5$$

$$100$$